УДК 517.977.8, 519.837.4

Одновременная многократная поимка в задачах группового преследования

А. И. Благодатских[1]
e-mail: aiblag@mail.ru

1. Введение

Основополагающий вклад в теорию дифференциальных игр двух лиц внесли работы школ академика Л.С. Понтрягина [1] и академика Н.Н. Красовского [2].

Естественным обобщением игр двух лиц являются задачи со многими участниками. Задача простого группового преследования с равными возможностями рассматривалась Б.Н. Пшеничным [3], были получены необходимые и достаточные условия поимки.

Понятие многократной поимки ввел Н.Л. Григоренко [4], для задачи с простыми движениями и равными возможностями им представлены необходимые и достаточные условия многократной поимки. А.А. Чикрием [5] и Н.Н. Петровым [6] были получены достаточные условия многократной поимки убегающего в конфликтно управляемых процессах и в примере Л.С. Понтрягина с равными возможностями.

В работах [7–9] введены понятия нестрогой одновременной и одновременной многократных поимок для различных постановок задач конфликтного взаимодействия с равными возможностями, получены условия их разрешимости. В рамках доклада планируется обсудить полученные результаты.

2. Постановка задачи

В пространстве $\mathbb{R}^k$ $(k \geqslant 2)$ рассматривается дифференциальная игра Γ $n+1$ лиц: n преследователей $P_1, P_2, \ldots, P_n$ и убегающего E с законами движения и начальными условиями (при $t = t_0$)

$$\begin{array}{lcllll} P_i & : & \dot{x}_i = A(t)x_i + u_i, & u_i \in U(t), & x_i(t_0) = X_i^0, & i \in I(n), \\ E & : & \dot{y} = A(t)y + v, & v \in U(t), & y(t_0) = Y^0, & \end{array} \qquad (1)$$

[1]Удмуртский государственный университет, Ижевск, Россия

причем $X_i^0 \neq Y^0$ при всех $i \in I(n)$. Здесь $x_i, y \in \mathbb{R}^k$; $A(t)$ — определенная на $[t_0, \infty)$ квадратная матрица порядка k; $U(t)$ — многозначное отображение из $[t_0, \infty)$ в $\mathbb{R}^k$; $I(q) = \{1, 2, \dots, q\}$ для всех $q \geqslant 1$; $S(o, r)$ — шар в $\mathbb{R}^k$ с центром в точке o радиуса r; O — нуль-матрица соответствующей размерности; $\mathcal{I}$ — единичная матрица соответствующей размерности.

Управления из класса измеримых по Лебегу функций на $[t_0, \infty)$ со значениями из $U(t)$ будем называть допустимыми. Для множества допустимых управлений $U(t)$ и матрицы $A(t)$ выполнены предположения (будут сформулированы ниже), при которых решение системы (1) существует, единственно и продолжимо на любой отрезок для всех допустимых управлений.

Пусть σ — некоторое разбиение — $t_0 = \theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_q < \dots$ — промежутка $[t_0, \infty)$, не имеющее конечных точек сгущения (либо точек в разбиении конечное число, либо $\lim\limits_{q \to \infty} \theta_q = \infty$).

Кусочно-программной стратегией убегающего E, соответствующей разбиению σ, будем называть отображение, ставящее в соответствие моменту θ_q и позициям $x_i(\theta_q)$, $i \in I(n)$, $y(\theta_q)$ допустимое управление $v(t)$, определенное для $t \in [\theta_q, \theta_{q+1})$, то есть

$$v(t) = v\big(t,\ \theta_q,\ x_i(\theta_q),\ i \in I(n),\ y(\theta_q)\big),\ t \in [\theta_q, \theta_{q+1}),\ q = 0, 1, 2, \dots$$

Если момент θ_{q+1} не определен (θ_q — последняя точка разбиения σ), то считаем $\theta_{q+1} = \infty$.

Кусочно-программной контрстратегией преследователя P_i, соответствующей разбиению σ, будем называть отображение, ставящее в соответствие моменту θ_q, позициям $x_\alpha(\theta_q)$, $\alpha \in I(n)$, $y(\theta_q)$ и сужению $(v(\cdot) \mid [\theta_q, \theta_{q+1}))$ допустимого управления $v(\cdot)$ убегающего E на интервал $[\theta_q, \theta_{q+1})$ допустимое управление $u_i(t)$, определенное для $t \in [\theta_q, \theta_{q+1})$, то есть

$$u_i(t) = u_i\big(t,\ \theta_q,\ x_\alpha(\theta_q),\ \alpha \in I(n),\ y(\theta_q),\ (v(\cdot) \mid [\theta_q, \theta_{q+1}))\big),$$
$$t \in [\theta_q, \theta_{q+1}),\ q = 0, 1, 2, \dots$$

Действия преследователей можно трактовать так: имеется центр управления, который каждому преследователю P_i, $i \in I(n)$, пошагово строит допустимое управление $u_i(\cdot)$, руководствуясь при этом некоторой целью (общей для группы преследователей).

Для каждого $q \in I(n)$ определим множество

$$\Omega(q) = \big\{\{i_1, i_2, \dots, i_q\} : i_1 < i_2 < \dots < i_q,\ i_1, i_2, \dots, i_q \in I(n)\big\}.$$

Определение 1. В игре Γ возможна *b-кратная поимка* $\bigl($*нестрогая одновременная b-кратная поимка*$\bigr)$, если существует конечный момент T_0 такой, что для любого разбиения σ существуют кусочно-программные контрстратегии преследователей P_i, $i \in I(n)$, соответствующие разбиению σ, что для любой кусочно-программной стратегии убегающего E, соответствующей разбиению σ, найдутся множество $\Lambda \in \Omega(b)$ и моменты $\tau_\alpha \in [t_0, T_0]$, $\alpha \in \Lambda$ $\bigl($и момент $\tau \in [t_0, T_0]$ $\bigr)$, для которых

$$x_\alpha(\tau_\alpha) = y(\tau_\alpha) \ \bigl(x_\alpha(\tau) = y(\tau)\bigr) \text{ при всех } \alpha \in \Lambda.$$

Определение 2. В игре Γ возможна *одновременная b-кратная поимка*, если существует конечный момент T_0 такой, что для любого разбиения σ существуют кусочно-программные контрстратегии преследователей P_i, $i \in I(n)$, соответствующие разбиению σ, что для любой кусочно-программной стратегии убегающего E, соответствующей разбиению σ, найдутся множество $\Lambda \in \Omega(b)$ и момент $\tau \in [t_0, T_0]$, для которых

$$x_\alpha(\tau) = y(\tau), \ x_\alpha(s) \neq y(s) \text{ при всех } s \in [t_0, \tau), \ \alpha \in \Lambda.$$

Отметим, что при $b = 1$ вышеприведенные определения поимок совпадают (в этом случае кратность поимки можно не указывать и говорить, что в игре Γ возможна *поимка*). При $b \geqslant 2$ возможность b-кратной поимки является необходимым условием осуществления нестрогой одновременной b-кратной поимки, которая, в свою очередь, необходима для реализации одновременной b-кратной поимки; наоборот — реализация одновременной b-кратной поимки достаточна для осуществления нестрогой одновременной b-кратной поимки, а последняя сразу влечет b-кратную поимку.

3. Результаты для простых движений $(A(t) \equiv O)$

При $A(t) \equiv O$ система (1) примет вид

$$\begin{array}{lllll} P_i & : & \dot{x}_i = u_i, & u_i \in U(t), & x_i(t_0) = X_i^0, \quad i \in I(n), \\ E & : & \dot{y} = v, & v \in U(t), & y(t_0) = Y^0. \end{array}$$

Введем обозначения

$$\lambda(w, \xi; W) = \sup\bigl\{\lambda \geqslant 0 : (w - \lambda\xi) \in W\bigr\},$$

$$\lambda_i(v,t) = \lambda(v, X_i^0 - Y^0; U(t)),$$

$$\delta_0(t) = \min_{v\in U(t)} \max_{\Lambda\in\Omega(b)} \min_{\alpha\in\Lambda} \lambda_\alpha(v,t),\ \Delta_0 = \int_{t_0}^{\infty} \delta_0(s)\,ds.$$

Предположение 1. *Существуют непрерывная и невырожденная на $[t_0,\infty)$ квадратная матрица $B(t)$ порядка k и непрерывная на $[t_0,\infty)$ функция $g(t)\in\mathbb{R}^k$ такие, что*

$$B(t)(U(t)+g(t)) = S(0,1) \text{ для всех } t\in[t_0,\infty). \tag{2}$$

Теорема 1 ([8]). *Пусть выполнено предположение* 1, $A(t)\equiv O$ *и* $\Delta_0=\infty$. *Тогда в игре* Γ *возможна одновременная* b*-кратная поимка.*

Предположение 2. *Существуют кусочно-непрерывная и невырожденная на $[t_0,\infty)$ квадратная матрица $B(t)$ порядка k и кусочно-непрерывная на $[t_0,\infty)$ функция $g(t)\in\mathbb{R}^k$ такие, что имеет место равенство* (2).

Предположение 3. *Для любого $T\geqslant t_0$ существует $r>0$, что*

$$U(t)\subset S(0,r) \text{ для всех } t\in[t_0,T].$$

Теорема 2. *Пусть выполнены предположения* 2, 3, $A(t)\equiv O$ *и* $\Delta_0=\infty$. *Тогда в игре* Γ *возможна одновременная* b*-кратная поимка.*

4. Результаты для общего случая ($A(t)\not\equiv O$)

Рассмотрим общий случай ($A(t)\not\equiv O$).

Предположение 4. *Матрица $A(t)$ непрерывна на $[t_0,\infty)$.*

Пусть $\Phi(t)$ — фундаментальная матрица системы $\dot\varphi = A(t)\varphi$ такая, что $\Phi(t_0)=\mathcal{I}$. Далее,

$$\lambda_i^1(v,t) = \lambda(\Phi^{-1}(t)v, X_i^0 - Y^0; \Phi^{-1}(t)U(t)),$$

$$\delta_1(t) = \min_{v\in U(t)} \max_{\Lambda\in\Omega(b)} \min_{\alpha\in\Lambda} \lambda_\alpha^1(v,t), \quad \Delta_1 = \int_{t_0}^{\infty} \delta_1(s)\,ds.$$

Теорема 3 ([8]). *Пусть выполнены предположения* 1, 4 *и* $\Delta_1=\infty$. *Тогда в игре* Γ *возможна одновременная* b*-кратная поимка.*

Предположение 5. *Матрица $A(t)$ кусочно-непрерывна на $[t_0, \infty)$.*

Для случая кусочно-непрерывной матрицы (предположение 5) по параметрам системы (1) определяется величина Δ_2.

Теорема 4. *Пусть выполнены предположения* 2, 3, 5 *и* $\Delta_2 = \infty$. *Тогда в игре* Γ *возможна одновременная b-кратная поимка.*

5. Литература

[1] *Понтрягин Л.С.* Линейная дифференциальная игра убегания // Труды МИАН СССР. 1971. Т. 112. С. 30–63. https://www.mathnet.ru/rus/tm3032

[2] *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.

[3] *Пшеничный Б.Н.* Простое преследование несколькими объектами // Кибернетика. 1976. № 3. С. 145–146.

[4] *Григоренко Н.Л.* Математические методы управления несколькими динамическими процессами. М.: Изд-во МГУ, 1990.

[5] *Чикрий А.А.* Конфликтно управляемые процессы. Киев: Наукова думка, 1992.

[6] *Петров Н.Н.* Многократная поимка в примере Понтрягина с фазовыми ограничениями // Прикладная математика и механика. 1997. Т. 61, вып. 5. С. 747–754. https://pmm.ipmnet.ru/ru/Issues/1997/61-5

[7] *Благодатских А.И., Петров Н.Н.* Конфликтное взаимодействие групп управляемых объектов. Ижевск: Удмуртский университет, 2009. https://www.elibrary.ru/item.asp?id=22947344

[8] *Blagodatskikh A.I., Petrov N.N.* Simultaneous multiple capture of rigidly coordinated evaders // Dynamic Games and Applications. 2019. V. 9, №. 3. P. 594–613. https://doi.org/10.1007/s13235-019-00300-8

[9] *Благодатских А.И., Банников А.С.* Одновременная многократная поимка при наличии защитников убегающего // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2023. Т. 62. С. 10–29. https://doi.org/10.35634/2226-3594-2023-62-02