УДК 517.977.1

Построение наблюдателей состояния в ограниченной задаче двух тел

С. А. Шатков[1],
e-mail: shatkovsa@gmail.com

1. Введение

Задача управления нелинейными динамическими системами усложняется, если непосредственному измерению доступна лишь часть фазового вектора. Для многих систем, описываемых уравнениями второго порядка, зачастую не известна собственная скорость движения относительно окружающего пространства. В данном докладе представлены результаты применения метода аналитического конструирования агрегированных регуляторов (АКАР) [1] к построению асимптотического наблюдателя вектора скорости. Результаты, обсуждающиеся в докладе, являются продолжением исследований, ранее представленных в работе [2].

2. Постановка задачи

Рассмотрим динамическую систему, описывающую движение объекта в центральном поле в ограниченной задаче двух тел

$$\begin{gathered} \dot{r}\left(t\right)=V_r,\ \dot{V}_r\left(t\right)=V_\theta^2 r^{-1}-\tfrac{h^2}{p}r^{-2}+U_r,\\ \dot{\theta}\left(t\right)=V_\theta r^{-1},\ \dot{V}_\theta\left(t\right)=-V_r V_\theta r^{-1}+U_\theta,\\ r\left(0\right)=r_0,\ V_r\left(0\right)=V_{r0},\theta\left(0\right)=\theta_0,V_\theta\left(0\right)=V_{\theta 0}, \end{gathered} \tag{1}$$

где r,θ - полярные координаты, V_r,V_θ - радиальная и трансверсальная составляющие скорости, U_r,U_θ - радиальная и трансверсальная составляющие вектора тяги, p - фокальный параметр, h - угловой момент системы.

В работе [2] были получены функции управления в форме обратной связи

$$\begin{aligned} U_r&=U_r\left(r,V_r,\theta,V_\theta\right),\\ U_\theta&=U_\theta\left(r,V_r,\theta,V_\theta\right). \end{aligned} \tag{2}$$

[1]Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

Задача состоит в построении модели наблюдателя для ненаблюдаемого вектора (V_r, V_θ) следующего вида

$$\begin{array}{l} \dot{z}_1(t) = f_1(r, \theta, z_1), \\ \dot{z}_2(t) = f_2(r, \theta, z_2), \end{array} \tag{3}$$

где z_1, z_2 - внутренние переменные модели наблюдателя, с помощью которых можно получить оценки $\hat{V}_r, \hat{V}_\theta$.

3. Решение задачи построения наблюдателя

Согласно процедуре построения наблюдателей [1] выберем макропеременные в виде

$$\begin{array}{l} \psi_1 = V_r \cos\theta - V_\theta \sin\theta - \hat{\varphi}_1, \\ \psi_2 = V_r \sin\theta + V_\theta \cos\theta - \hat{\varphi}_2. \end{array} \tag{4}$$

Если макропеременные ψ_1 и ψ_2 равны нулю и оценки $\hat{\varphi}_1$ и $\hat{\varphi}_2$ известны, то оценки скорости $\hat{V}_r$ и $\hat{V}_\theta$ в силу невырожденности матрицы поворота на угол θ можно получить следующим образом

$$\begin{array}{c} \hat{V}_r = \hat{\varphi}_1 \cos\theta + \hat{\varphi}_2 \sin\theta, \\ \hat{V}_\theta = -\hat{\varphi}_1 \sin\theta + \hat{\varphi}_2 \cos\theta. \end{array} \tag{5}$$

Предположение. *Для* (4) *выполняются уравнения.*

$$\begin{array}{l} \dot{\psi}_1(t) = L_1\psi_1,\ L_1 < 0, \\ \dot{\psi}_2(t) = L_2\psi_1,\ L_2 < 0. \end{array} \tag{6}$$

Нулевые решения данных уравнений асимптотически устойчивы, а сами уравнения (6) *являются уравнениями Эйлера-Лагранжа, решения которых доставляют минимумы следующим функционалам*

$$\begin{array}{l} \int_0^\infty \left(L_1^2\psi_1^2(t) + \dot{\psi}_1^2(t)\right) dt \to min, \\ \int_0^\infty \left(L_2^2\psi_2^2(t) + \dot{\psi}_2^2(t)\right) dt \to min. \end{array} \tag{7}$$

Подставим макропеременные (4) в уравнения (6), взяв производные в силу системы (1)

$$
\begin{array}{c}
\left(V_\theta^2 r^{-1} - \frac{h_1^2}{p_1} r^{-2} + U_r\right)\cos\theta + V_r V_\theta r^{-1}\sin\theta - \\
-\left(-V_r V_\theta r^{-1} + U_\theta\right)\sin\theta - V_\theta^2 r^{-1}\cos\theta - \dot{\hat{\varphi}}_1 = L_1\psi_1, \\
\left(V_\theta^2 r^{-1} - \frac{h_1^2}{p_1} r^{-2} + U_r\right)\sin\theta + V_r V_\theta r^{-1}\cos\theta + \\
+\left(-V_r V_\theta r^{-1} + U_\theta\right)\cos\theta - V_\theta^2 r^{-1}\sin\theta - \dot{\hat{\varphi}}_2 = L_2\psi_2.
\end{array}
\tag{8}
$$

Для того, чтобы избавиться от слагаемых, содержащих ненаблюдаемые скорости V_r и V_θ введем следующие замены

$$
\begin{array}{c}
\Gamma_{11}(r,\theta) = -L_1\cos\theta, \\
\Gamma_{12}(r,\theta) = L_1 r\sin\theta, \\
\Gamma_{21}(r,\theta) = -L_2\sin\theta, \\
\Gamma_{22}(r,\theta) = -L_1 r\cos\theta,.
\end{array}
\tag{9}
$$

$$
\begin{array}{c}
\gamma_1(r,\theta,U_r,U_\theta) = \left(-\frac{h^2}{p} r^{-2} + U_r\right)\cos\theta - U_\theta\sin\theta, \\
\gamma_2(r,\theta,U_r,U_\theta) = \left(-\frac{h^2}{p} r^{-2} + U_r\right)\sin\theta + U_\theta\cos\theta.
\end{array}
\tag{10}
$$

Тогда равнения (8) примут следующий вид

$$
\begin{array}{c}
V_r\Gamma_{11}(r,\theta) + V_\theta r^{-1}\Gamma_{12}(r,\theta) + \gamma_1(r,\theta,U_r,U_\theta) = \dot{\hat{\varphi}}_1 - L_1\hat{\varphi}_1, \\
V_r\Gamma_{21}(r,\theta) + V_\theta r^{-1}\Gamma_{22}(r,\theta) + \gamma_2(r,\theta,U_r,U_\theta) = \dot{\hat{\varphi}}_2 - L_2\hat{\varphi}_2.
\end{array}
\tag{11}
$$

Будем искать выражения для внутренних переменных наблюдателя в виде

$$
\begin{array}{c}
z_1 = G_1(r,\theta) - \hat{\varphi}_1, \\
z_2 = G_2(r,\theta) - \hat{\varphi}_2,
\end{array}
\tag{12}
$$

где G_1, G_2 - неизвестные функции.

После подстановки $\hat{\varphi}_1, \hat{\varphi}_2$ вместе с производными $\dot{\hat{\varphi}}_1, \dot{\hat{\varphi}}_2$ в уравнения (11) получаем следующие соотношения для частных производных

$$
\begin{array}{c}
\frac{\partial}{\partial r} G_1(r,\theta) = -L_1\cos\theta,\ \frac{\partial}{\partial\theta} G_1(r,\theta) = L_1 r\sin\theta, \\
\frac{\partial}{\partial r} G_2(r,\theta) = -L_2\sin\theta,\ \frac{\partial}{\partial\theta} G_2(r,\theta) = -L_2 r\cos\theta.
\end{array}
\tag{13}
$$

Подходящие функции G_1, G_2 имеют вид

$$
\begin{aligned}
G_1(r,\theta) &= -L_1 r\cos\theta,\\
G_2(r,\theta) &= -L_2 r\sin\theta.
\end{aligned}
\tag{14}
$$

Таким образом, искомая модель наблюдателя построена

$$
\begin{aligned}
z_1 &= -L_1 r\cos\theta - \hat{\varphi}_1,\\
z_2 &= -L_2 r\sin\theta - \hat{\varphi}_2,
\end{aligned}
\tag{15}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{z}_1(t) &= L_1^2 r\cos\theta + L_1 z_1 - \gamma_1\left(r,\theta,\hat{U}_r,\hat{U}_\theta\right),\\
\dot{z}_2(t) &= L_2^2 r\sin\theta + L_2 z_2 - \gamma_2\left(r,\theta,\hat{U}_r,\hat{U}_\theta\right),
\end{aligned}
\tag{16}
$$

где $\hat{U}_r, \hat{U}_\theta$ получаются из формул (2) заменой ненаблюдаемых компонент вектора скорости V_r, V_θ на их оценки $\hat{V}_r, \hat{V}_\theta$, получаемые с помощью соотношений (5) и (15)

$$
\begin{aligned}
\hat{U}_r &= U_r\left(r,\hat{V}_r,\theta,\hat{V}_\theta\right),\\
\hat{U}_\theta &= U_\theta\left(r,\hat{V}_r,\theta,\hat{V}_\theta\right).
\end{aligned}
\tag{17}
$$

Построенная с помощью метода АКАР модель наблюдателя вектора скорости позволяет управлять движением объекта в ограниченной задаче двух тел в случае, если вектор скорости не наблюдается. Для демонстрации работы модели были проведены численные расчеты в математическом пакете Maple и сравнение с движением системы в исходной задаче. На Рис. 1 и 2 представлены результаты. Черная линия отвечает траектории и графикам исходной задачи, а синяя - решению задачи при отсутствии информации о фазовых переменных, относящимся к скоростям.

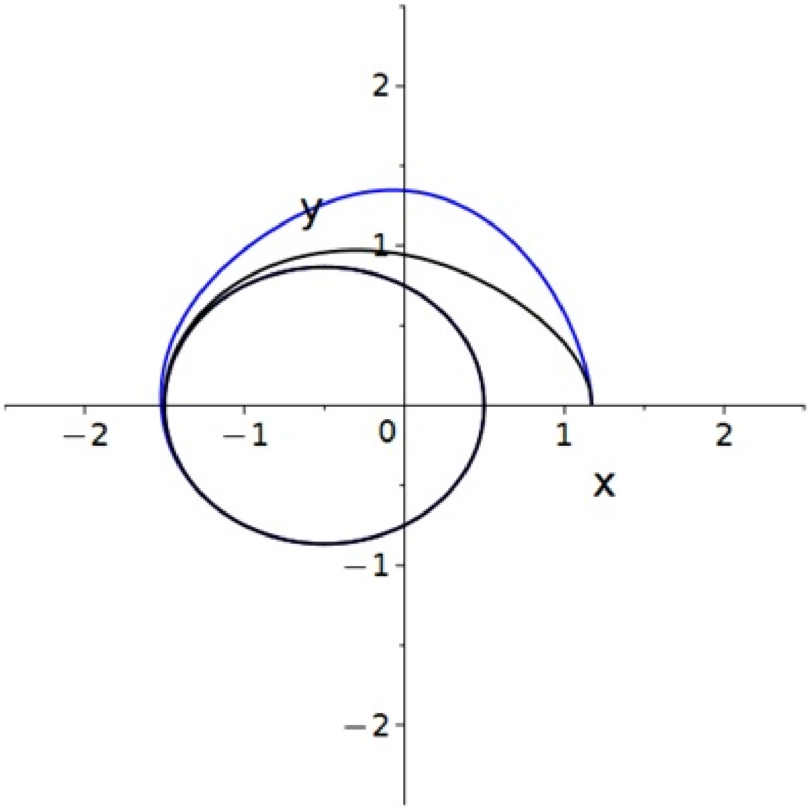

Рис. 1: Движение в плоскости

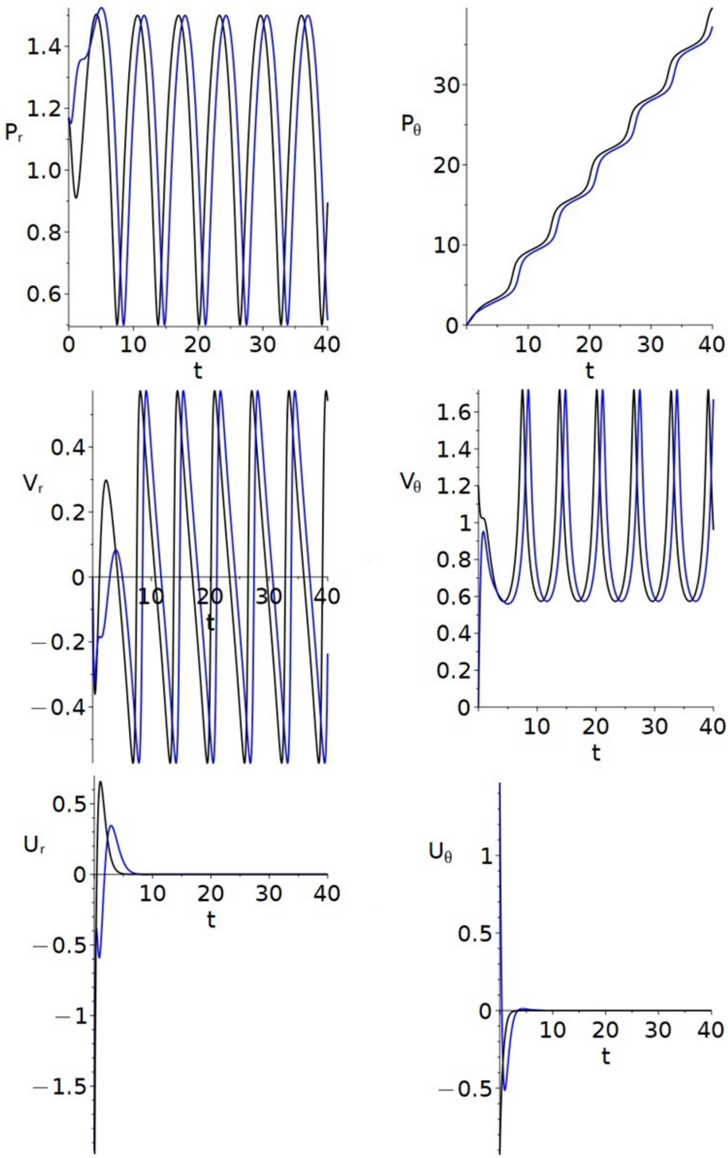

Рис. 2: Графики фазовых переменных и управления

4. Литература

[1] *Колесников А.А.* Синергетические методы управления сложными системами: теория системного синтеза. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2019.

[2] *Горьков В.П., Лукьянова Л.Н., Шатков С.А.* Позиционное управление движением космического аппарата с гибридной двигательной системой // Труды факультета ВМК МГУ им. М.В. Ломоносова. М.: ООО «МАКС Пресс», 2021. Т. 66. С. 1–10.