

О приближенном решении задачи управления динамической системой при наличии фазовых ограничений

И. Н. Кандоба^{1,2},

e-mail: kandoba@imm.uran.ru

1. Постановка задачи

В поле тяготения на промежутке времени $[t_s, t_f]$ рассматривается поступательное движение центра масс некоторого объекта (далее — материальной точки) под действием силы тяжести и реактивной силы. Реактивная сила \mathcal{P} действует по направлению одной из осей связанной с объектом подвижной системы координат. Предполагается, что гравитационное ускорение, порождаемое силой тяжести, определяется одним и тем же вектором \mathbf{g} , который направлен в сторону некоторой плоскости $\Pi \in \mathbb{R}^3$ и ортогонален ей. В этой плоскости задана точка O , определяющая начало координат неподвижной системы $Oxyz$. Ось Oy этой системы антинаправлена вектору \mathbf{g} , а оси Ox и Oz лежат в плоскости Π и взаимно ортогональны.

Поступательное движение материальной точки на промежутке времени $[t_s, t_f]$ в системе координат $Oxyz$ описывается уравнениями

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}, \quad \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{g} + \mathbf{W}^r(\mathcal{P}, m, \phi), \quad \dot{m} = -\mu(t), \quad (1)$$

где $\mathbf{x}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ — положение и скорость материальной точки; $\mathbf{W}^r(\mathcal{P}, m, \phi)$ — ускорение, вызванное действием реактивной силы \mathcal{P} , $p = |\mathcal{P}|$; m — масса объекта; $\phi = (\vartheta, \psi)^\top \in \mathbb{R}^2$ — углы тангажа ϑ и рыскания ψ , которые задают пространственную ориентацию силы \mathcal{P} в $Oxyz$ (ϑ — угол между проекцией вектора силы \mathcal{P} на плоскость Oxy и осью Oy , ψ — угол между вектором силы \mathcal{P} и его проекцией на плоскость Oxy); $\mu(t)$ — неотрицательная на $[t_s, t_f]$ функция.

¹Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург, Россия

²Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина, Екатеринбург, Россия

Для системы (1) задаются начальные условия

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t_s) &= \mathbf{x}^{(0)}, & \mathbf{v}(t_s) &= \mathbf{v}^{(0)}, & p(t_s) &= p^{(0)}, & m(t_s) &= m^{(0)}, \\ \vartheta(t_s) &= \vartheta^{(0)}, & \psi(t_s) &= \psi^{(0)}. \end{aligned} \quad (2)$$

В качестве управляющих параметров в системе (1) используются скорости U_ϑ , U_ψ , U_p изменения углов тангажа ϑ , рыскания ψ и величины реактивной силы \mathcal{P} соответственно, значения которых должны удовлетворять условиям

$$|U_\vartheta(t)| \leq U_\vartheta^{\max}, \quad |U_\psi(t)| \leq U_\psi^{\max}, \quad t \in [t_s, t_f], \quad (3)$$

$$|U_p(t)| \leq U_p^{\max}, \quad t \in [t_s, t_f], \quad (4)$$

где U_ϑ^{\max} , U_ψ^{\max} , U_p^{\max} – заданные положительные константы.

Исследуется задача приведения материальной точки в начало координат O неподвижной системы с заданной точностью с выполнением некоторых требований к текущему фазовому состоянию системы (1) и дополнительных терминальных условий, которые возникают в ряде прикладных задач управления.

Будем считать, что $\mu(t) \equiv \mu > 0$, а момент времени $t_f > t_s$ окончания управления определяется из условия $m(t_f) = 0$.

З а д а ч а 1. (Основная задача) На промежутке времени $[t_s, t_f]$ для управляемой системы (1) с заданными начальными условиями (2) найти программное управление $\mathbf{U} = (U_\vartheta, U_\psi, U_p)^\top$ (кусочно-непрерывную на $[t_s, t_f]$ вектор-функцию), которое удовлетворяет условиям (3), (4), обеспечивает выполнение фазовых ограничений

$$|\vartheta(t)| \leq \vartheta^{\max}, \quad |\psi(t)| \leq \psi^{\max}, \quad t \in [t_s, t_f], \quad (5)$$

$$0 \leq p(t) \leq p^{\max}, \quad t \in [t_s, t_f], \quad (6)$$

$$y(t) \geq 0, \quad t \in [t_s, t_f], \quad (7)$$

и терминальных условий

$$\|\mathbf{x}(t_f)\|_{\mathbb{R}^3}^2 \leq \Delta_{\mathbf{x}}^2, \quad \|\mathbf{v}(t_f)\|_{\mathbb{R}^3}^2 \leq \Delta_{\mathbf{v}}^2, \quad \|\phi(t_f)\|_{\mathbb{R}^2}^2 \leq \Delta_{\phi}^2, \quad (8)$$

где $\vartheta^{\max} < \frac{\pi}{2}$, $\psi^{\max} < \frac{\pi}{2}$, p^{\max} , $\Delta_{\mathbf{x}}$, $\Delta_{\mathbf{v}}$, Δ_{ϕ} – заданные положительные константы.

2. Метод приближенного решения задачи

Далее неотрицательную на $[t_s, t_f]$ функцию p будем называть функцией тяги, а порождающее ее управление U_p – управлением тягой.

Для приближенного решения основной задачи 1 предлагается итерационная по управлению тягой процедура. Компонента U_p искомого в задаче 1 управления строится на классе кусочно- постоянных функций, определенных на некотором заданном разбиении $T_n = \{t_i\}_{i=0}^n$ промежутка времени $[t_s, t_f]$: $t_{i+1} = t_i + h$, $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$, где $t_0 = t_s$, $h = (t_f - t_s)/n$, $n \in \mathbb{N}$, n – параметр процедуры. Начальное управление тягой $U_p^{(0)}$ полагается тождественно равным нулю.

Принятые допущения относительно гравитационного ускорения g позволяют произвести декомпозицию исходной системы (1) на более простые динамические системы, каждая из которых независимо от других описывает динамику определенной части компонент общей фазовой траектории системы (1) для известных промежутке $[t_s, t_f]$ функций ϑ и ψ .

На текущей k -ой итерации этой процедуры последовательно решаются две вспомогательные задачи оптимального управления для таких динамических систем.

Первая вспомогательная задача формулируется для системы

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v_x, & \dot{z} &= v_z, \\ \dot{v}_x &= g_x + \frac{p}{m} \sin(\vartheta) \cos(\psi), & \dot{v}_z &= g_z - \frac{p}{m} \sin(\psi), \\ \dot{m} &= -\mu, \end{aligned} \quad (9)$$

которая описывает движение материальной точки в плоскости Π . В ней в качестве управляющих параметров используются скорости U_ϑ , U_ψ изменения углов тангажа ϑ и рыскания ψ соответственно, а функция тяги $p(t) = p^{(k)}(t)$, $t \in [t_s, t_f]$, считается известной и определяется текущим управлением тягой $U_p^{(k)}$.

З а д а ч а 2.1. На промежутке времени $[t_s, t_f]$ для управляемой системы (9) с заданными начальными условиями (2) найти программное управление $\widehat{U} = (U_\vartheta, U_\psi)^\top$ (кусочно-непрерывную на $[t_s, t_f]$ вектор-функцию), которое удовлетворяет условию (3), обеспечивает выполнение фазовых ограничений (5), терминального условия

$$x^2(t_f) + z^2(t_f) \leq \varepsilon_{xz}^2$$

и доставляет минимальное значение функционалу

$$J_{\phi}[\cdot] = v_x^2(t_f) + v_z^2(t_f).$$

Здесь $\varepsilon_{xz} < \Delta \mathbf{x}$ – заданная положительная константа.

Для решения вспомогательной задачи 2.1 применяется описанный в [1] алгоритм, который построен на основе предложенной в [2] методологии.

Вторая вспомогательная задача оптимального управления формулируется для системы

$$\dot{y} = v_y, \quad \dot{v}_y = g_y + \frac{p}{m} \cos(\vartheta) \cos(\psi), \quad \dot{m} = -\mu, \quad (10)$$

которая описывает вертикальное движение материальной точки. В (10) управлением является скорость U_p изменения значения функции тяги, а функции $\vartheta(t) = \vartheta^{(k)}(t)$, $\psi(t) = \psi^{(k)}(t)$, $t \in [t_s, t_f]$, считаются известными и определяются решением задачи 2.1 – управлением $\widehat{U}^{(k)}$.

З а д а ч а 2.2. На промежутке времени $[t_s, t_f]$ для управляемой системы (10) с заданными начальными условиями (2) найти программное управление U_p (кусочно- непрерывную на $[t_s, t_f]$ функцию), которое удовлетворяет условию (4), обеспечивает выполнение фазовых ограничений (6), (7), терминального условия

$$y(t_f) \leq \varepsilon_y$$

и доставляет минимальное значение функционалу

$$J_p[\cdot] = v_y^2(t_f) + \int_{t_s}^{t_f} p^2(\tau) d\tau.$$

Здесь ε_y – заданная положительная константа: $\varepsilon_y^2 + \varepsilon_{xz}^2 \leq \Delta \mathbf{x}^2$.

Приближенное решение вспомогательной задачи 2.2 может быть определено как оптимальный план задачи квадратичного программирования, которая возникает в результате дискретизации всех условий задачи 2.2 на заданном разбиении T_n промежутка времени $[t_s, t_f]$.

Единственное решение задачи квадратичного программирования определяет на $[t_s, t_f]$ непрерывную кусочно-линейную функцию

тяги $p^{(k+1)}$, порождаемую управлением тягой $U_p^{(k+1)}$, для которого выполняется следующая $k + 1$ -ая итерация процедуры.

Итерационная процедура завершается при выполнении условия

$$\|p^{(k+1)}(t) - p^{(k)}(t)\|_{C([t_s, t_f])} < \Delta_p,$$

где Δ_p – заданная положительная константа.

Обсуждаются вопросы существования решений вспомогательных задач 2.1 и 2.2, а также вопрос о сходимости описанной выше итерационной процедуры к решению основной задачи 1. Приводятся результаты вычислительных экспериментов с использованием модельных данных.

3. Литература

- [1] *Кандоба И.Н.* Об одном подходе к решению прикладной задачи управления с фазовыми ограничениями // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2024. Т.30, № 3. С. 149–165. DOI: 10.21538/0134-4889-2024-30-3-149-165
- [2] *Мазгалит Д.В.* Построение способа управления ракетой-носителем при использовании в качестве управления программных угловых скоростей разворотов // Информационно-управляющие системы. 2010. № 3 (46). С. 21–29.