УДК 517.977

К вопросу о полиэдральном методе решения задачи терминального уклонения в многошаговых системах с аддитивными и матричными управлениями

Е. К. Костоусова[1]

e-mail: kek@imm.uran.ru

В работе рассматривается задача терминального уклонения в условиях конфликта для многошаговых систем с исходно линейной структурой, где действуют управления u, U и v, V, цели которых могут быть различны, причем u и v входят аддитивно, а U и V — в матрицу системы. Известно, что задачи конфликтного управления могут быть решены с помощью трубок разрешимости [1, 2], но их практическое построение, как правило, затруднительно. Наличие матричных управлений U и V привносит в системы нелинейность, что усложняет задачу [3, 4]. Среди многих численных методов активно развиваются и не слишком трудоемкие, основанные на оценивании множеств областями простой формы типа эллипсоидов [2–4], параллелепипедов/параллелотопов (см., например, [5,6]), многомерных интервалов, зонотопов, других полиэдральных множеств специальной формы [7]. Работа посвящена разработке полиэдрального метода с использованием параллелотопозначных трубок и продолжает исследования [6], где не было управлений V.

1. Постановка задачи

Рассматриваются конфликтно-управляемые системы типа [5]:

$$\begin{gathered}
x[k] = (A[k]{+}U[k]{+}V[k])\,x[k{-}1]{+}B[k]u[k]{+}C[k]v[k],\ k{=}1,\dots,N,\\
u[k] \in \mathcal{R}[k] = \mathcal{P}[r[k],\bar{R}[k]],\ v[k] \in \mathcal{Q}[k] = \mathcal{P}[q[k],\bar{Q}[k]],\ k{=}1,\dots,N,\\
U[k] \in \mathcal{U}[k] = \{U \in \mathbb{R}^{n\times n} \,|\, \mathrm{Abs}\,(U{-}\tilde{U}[k]) \le \hat{U}[k]\},\ k{=}1,\dots,N,\\
V[k] \in \mathcal{V}[k] = \{V \in \mathbb{R}^{n\times n} \,|\, \mathrm{Abs}\,(V{-}\tilde{V}[k]) \le \hat{V}[k]\},\ k{=}1,\dots,N.
\end{gathered} \tag{1}$$

[1]Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург, Россия

Здесь $x[k] \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния системы; аддитивно входящие управления $u[k] \in \mathbb{R}^{n_u}$ и $v[k] \in \mathbb{R}^{n_v}$ стеснены параллелотопозначными ограничениями, а матричные управления $U[k] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ и $V[k] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ — ограничениями интервального типа. Задано терминальное параллелотопозначное множество $\mathcal{M} = \mathcal{P}[p_{\rm f}, \bar{P}_{\rm f}]$. Напомним, что параллелотопом $\mathcal{P}[p, \bar{P}] \subset \mathbb{R}^n$ называют множество $\mathcal{P} = \mathcal{P}[p, \bar{P}] = \{x|\ x = p + \bar{P}\zeta,\ \|\zeta\|_\infty \le 1\}$, где $p \in \mathbb{R}^n$, $\bar{P} \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $m \le n$ (p определяет центр параллелотопа, $\bar{P}$ — форму). Параллелотоп $\mathcal{P}$ называем невырожденным, если $m = n$ и $\det \bar{P} \ne 0$.

Управления могут иметь конфликтующие цели. Так, цель u и U может состоять в том, чтобы гарантированно обеспечить включение $x[N]\in\mathcal{M}$ (задачи сближения такого рода исследовались в [5]), а цель v и V — в том, чтобы избежать попадания траектории на $\mathcal{M}$ (задачи уклонения такого рода при отсутствии V исследовалась в [6]).

Здесь рассматривается следующая *полиэдральная задача терминального уклонения.* Для системы (1) найти такие полиэдральную трубку $\mathcal{P}[k] = \mathcal{P}[p[k], \bar{P}[k]]$, $k = 0, 1, \ldots, N$, с терминальным условием $\mathcal{P}[N] \supseteq \mathcal{M}$ и соответствующие стратегии управления $v = v[k, x]$ и $V = V[k, x]$ удовлетворяющие $v[k, x] \in \mathcal{Q}[k]$, $V[k, x] \in \mathcal{V}[k]$, $k = 1, \ldots, N$, чтобы каждое решение $x[\cdot]$ уравнения $x[k] = (A[k]+U[k]+V[k, x[k-1]])\,x[k-1] + B[k]u[k] + C[k]v[k, x[k-1]]$, $k = 1, \ldots, N$, с $x[0] = x^0 \notin \mathcal{P}[0]$ проходило вне трубки $\mathcal{P}[\cdot]$: $x[k] \notin \mathcal{P}[k]$, $k = 1, \ldots, N$, каковы бы ни были допустимые (т.е. удовлетворяющие ограничениям из (1)) реализации $u[\cdot]$ и $U[\cdot]$.

Очевидно, что при решении решении полиэдральной задачи уклонения мы заинтересованы в построении трубки с как можно меньшим начальным сечением $\mathcal{P}[0]$.

2. Основные результаты

В русле подхода из [2] рассмотрим семейство полиэдральных трубок $\mathcal{P}[\cdot]{=}\mathcal{P}[p[\cdot], \bar{P}[\cdot]]$, определяемых следующими рекуррентными соотношениями, где $P[N]$ — произвольная неособая матрица:

$$
\begin{gathered}
p[N] = p_{\rm f}, \quad \bar{P}[N] = P[N]\,\mathrm{diag}\,((\mathrm{Abs}\,(P[N]^{-1}\bar{P}_{\rm f}))\,\mathrm{e});\\
p[k-1] = D[k]^{-1}(p[k]-B[k]r[k]-C[k]q[k]),\ D[k] = A[k]+\tilde{U}[k]+\tilde{V}[k],\\
\bar{P}[k-1] = D[k]^{-1}\,\bar{P}[k]\,\mathrm{diag}\,(\omega[k]+\tau[k]\,\mathrm{e}), \quad \omega[k] = \mathrm{e}+\alpha[k]-\gamma[k],\\
\alpha[k] = (\mathrm{Abs}\,(\bar{P}[k]^{-1}B[k]\bar{R}[k]))\,\mathrm{e}, \quad \gamma[k] = (\mathrm{Abs}\,(\bar{P}[k]^{-1}C[k]\bar{Q}[k]))\,\mathrm{e},
\end{gathered}
\tag{2}
$$

$k = N, \ldots, 1$, числа $\tau[k]$ могут быть определены тремя следующими способами $\tau[k] = \tau^i[k]$, $i \in \{0, 1, 2\}$, в зависимости от дополнительных условий (предположений), которые будут указаны ниже (см. (8)–(10)):

$$\tau[k] = \tau^0[k] = 0; \tag{3}$$

$$\tau[k] = \tau^1[k] = (c_1[k] + c_2[k]\, \|\omega[k]\|_\infty)/(1 - c_2[k]); \tag{4}$$

$$\tau[k]{=}\tau^2[k]{=}(c_1[k]{-}c_3[k]{+}(c_2[k]{+}c_4[k])\|\omega[k]\|_\infty)/(1{-}c_2[k]{-}c_4[k]), \tag{5}$$

где

$$\begin{gathered} c_1[k] = \|(\mathrm{Abs}\,(\bar{P}[k]^{-1}))\, \hat{U}[k]\, \mathrm{Abs}\, p[k{-}1]\|_\infty, \\ c_2[k] = \|(\mathrm{Abs}\,(\bar{P}[k]^{-1}))\, \hat{U}[k]\, \mathrm{Abs}\,(D[k]^{-1}\bar{P}[k])\|, \\ c_3[k] = \min\nolimits_{1 \le i \le n}((\mathrm{Abs}\,(\bar{P}[k]^{-1}))\, \hat{V}[k]\, \mathrm{Abs}\, p[k{-}1])_i, \\ c_4[k] = \|(\mathrm{Abs}\,(\bar{P}[k]^{-1}))\, \hat{V}[k]\, \mathrm{Abs}\,(D[k]^{-1}\bar{P}[k])\|. \end{gathered} \tag{6}$$

Здесь использованы обозначения: $\mathrm{Abs}\, A = \{|a_{ij}|\}$ для $A = \{a_{ij}\}$, $\mathrm{diag}\, \pi$ — диагональная матрица с компонентами вектора π на диагонали, символы е обозначают векторы вида е$=(1, 1, \ldots, 1)^\top$ соответствующих размерностей, $\|A\| = \|A\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^n |a_{i\,j}|$.

Соответствующие стратегии управления строим по формулам:

$$\begin{gathered} v[k, x] = q[k] + \bar{Q}[k]\chi[k, x], \\ \chi_j[k, x] = \mathrm{sign}\,(\bar{P}[k]^{-1}C[k]\bar{Q}[k])_{i_*[k]\,j}\, \mathrm{sign}\,(\bar{P}[k{-}1]^{-1}(x{-}p[k{-}1]))_{i_*[k]}, \\ j = 1, \ldots, n_v, \\ V[k, x] = \tilde{V}[k] + \Omega[k, x] * \hat{V}[k], \\ \Omega[k, x] = \{\omega_{lj}[k, x]\},\ \omega_{lj}[k, x] = \mathrm{sign}\,((\bar{P}[k]^{-1})_{i_*[k]l}\, x_j),\ l, j{=}1, \ldots, n, \\ i_*[k]{=}i_*[k, x] \in \mathrm{Argmax}_{\,1 \le i \le n} |(\bar{P}[k{-}1]^{-1}(x{-}p[k{-}1]))_i|, \end{gathered} \tag{7}$$

где $\Omega * \hat{V}$ означает поэлементное произведение матриц; $i_*[k]$ — произвольный индекс, удовлетворяющий (7).

Теорема. *Пусть в системе (1) все матрицы $D[k] = A[k] + \tilde{U}[k] + \tilde{V}[k]$ — неособые и $\mathcal{M}$ — невырожденный параллелотоп. Пусть $P[N]$ — произвольная неособая матрица и в процессе вычисления полиэдральной трубки $\mathcal{P}[\cdot]$ согласно соотношениям (2) на каждом шаге $k = N, \ldots, 1$ оказывается выполнена одна из трех групп условий (для простоты обозначений примем, что одна и та же для всех $k = N, \ldots, 1$), соответствующих величинам $\tau[k] = \tau^i[k]$,*

$i{\in}\{0,1,2\}$, *определеным формулами (3), (4) или (5):*

$$\delta^0[k] \stackrel{\text{def}}{=} \omega[k] > 0, \quad \hat{V}[k] \geq \hat{U}[k]; \tag{8}$$

$$\delta^1[k] \stackrel{\text{def}}{=} \omega[k] + c_1[k]\,\mathrm{e} > 0, \quad c_2[k] < 1; \tag{9}$$

$$\delta^2[k] \stackrel{\text{def}}{=} \omega[k] + (c_1[k] - c_3[k])\,\mathrm{e} > 0, \quad c_2[k] + c_4[k] < 1. \tag{10}$$

Тогда соответствующая параллелотопозначная трубка $\mathcal{P}[\cdot] = \mathcal{P}^i[\cdot]$ *имеет невырожденные сечения и вместе с отвечающими ей в силу (7) стратегиями управлений* $v[\cdot,\cdot]$ *и* $V[\cdot,\cdot]$ *дает решение рассматриваемой задачи терминального уклонения.*

При этом, если $x[\cdot]$ *— траектория, соответствующая* $x[0] \notin \mathcal{P}[0]$*, управлениям* $v[\cdot,\cdot]$ *и* $V[\cdot,\cdot]$ *из (7) и некоторым (произвольным) допустимым* $u[\cdot]$ *и* $U[\cdot]$*, то справедливы следующие гарантированные оценки снизу для отклонения* $x[\cdot]$ *от трубки* $\mathcal{P}[\cdot]$*, записанные в терминах относительных координат* $\zeta[k]{=}\bar{P}[k]^{-1}(x[k]{-}p[k])$*:*

$$\|\zeta[k]\|_\infty{-}1 \geq (\|\zeta[0]\|_\infty{-}1)\prod_{l=1}^{k}\delta_{i_*[l]}[l] \geq (\|\zeta[0]\|_\infty{-}1)\prod_{l=1}^{k}\min_{1\leq i\leq n}\delta_i[l] > 0, \tag{11}$$

$k = 1,\ldots,N$*, где в качестве* $\zeta[\cdot]$ *и* $\delta[\cdot]$ *нужно брать* $\zeta^i[\cdot]$ *и* $\delta^i[\cdot]$*, соответствующие трубке* $\mathcal{P}^i[\cdot]$*.*

Замечание. Из доказательства следует, что в случаях (8) и (9) оценки (11) для $\zeta[\cdot] = \zeta^i[\cdot]$, $i = 0,1$, могут быть несколько усилены за счет следующего уточнения рекуррентных одношаговых оценок:

$$\begin{gathered}\|\zeta^i[k]\|_\infty{-}1 \geq \delta^i_{i_*[k]}[k]\,(\|\zeta^0[k{-}1]\|_\infty{-}1) + \varepsilon^i[k, x[k{-}1], i_*[k]] > 0;\\ \varepsilon^0[k,x,i_*] = (\mathrm{Abs}\,(\bar{P}[k]^{-1}))\,(\hat{V}[k]{-}\hat{U}[k])\,\mathrm{Abs}\,x)_{i_*} \geq 0;\\ \varepsilon^1[k,x,i_*] = (\mathrm{Abs}\,(\bar{P}[k]^{-1})\,\hat{V}[k]\,\mathrm{Abs}\,x)_{i_*} \geq 0.\end{gathered} \tag{12}$$

Теорема обобщает результаты, полученные автором ранее, на случай систем, где могут присутствовать матричные управления V, а также включает и дополняет известные.

Действительно, при $\hat{U}[k] \equiv \hat{V}[k] \equiv 0$ условия (8), (9) и (10) совпадают, превращаясь в $\omega[k] > 0$, получаем одинаковые трубки $\mathcal{P}^i[\cdot]$, $i = 0,1,2$, и приходим к известным конструкциями и оценкам для случая линейных систем.

В случае $\hat{V}[k] \equiv 0$ условия (9) и (10) совпадают и трубки $\mathcal{P}^1[\cdot]$ и $\mathcal{P}^2[\cdot]$ оказываются одинаковыми. При этом условия (9) оказываются, вообще говоря, слабее, чем условия, наложенные в [6, теорема 2], а построенные там полиэдральные трубки могут, вообще говоря, иметь большие по включению начальные сечения, чем $\mathcal{P}^1[0] = \mathcal{P}^2[0]$. При этом в дополнение к результатам из [6] теорема предоставляет гарантированные оценки (11) и (12).

Заметим также, что условия (9) и (10) могут оказаться не слишком ограничительными при рассмотрении многошаговых систем, аппроксимирущих дифференциальные по схеме Эйлера (ср. с [5, Remark 2]).

3. Литература

[1] *Krasovskii N.N., Subbotin A.I.* Game-theoretical control problems. New York: Springer, 1988.

[2] *Kurzhanski A., Vályi I.* Ellipsoidal calculus for estimation and control. Boston: Birkhäuser, 1997.

[3] *Chernousko F.L., Rokityanskii D.Ya.* Ellipsoidal bounds on reachable sets of dynamical systems with matrices subjected to uncertain perturbations // J. Optimiz. Theory Appl. 2000. Vol. 104, No. 1. P. 1–19. DOI: 10.1023/A:1004687620019

[4] *Ананьев Б.И., Гусев М.И., Филиппова Т.Ф.* Управление и оценивание состояний динамических систем с неопределенностью. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2018.

[5] *Kostousova E.K.* On polyhedral control synthesis for dynamical discrete-time systems under uncertainties and state constraints // Discrete and Continuous Dynamical Systems. 2018. Vol. 38, No. 12. P. 6149–6162. DOI: 10.3934/dcds.2018153

[6] Костоусова Е.К. О полиэдральном методе синтеза управлений для задачи усиленного уклонения в многошаговых системах с билинейностью и фазовыми ограничениями // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2025. Т. 31, № 2. С. 125–140. DOI: 10.21538/0134-4889-2025-31-2-125-140

[7] *Kostousova E.K.* External polyhedral estimates for reachable sets of linear discrete-time systems with integral bounds on controls // Int. J. Pure Appl. Math. 2009. Vol. 50, No. 2. P.187–194.