

# О реконструкции управлений в механических системах

Е. А. Крупенников<sup>1</sup>,

e-mail: krupennikov@imm.uran.ru

## 1. Вступление

В докладе рассматривается задача реконструкции неизвестного управления по неточным дискретным замерам фазовой траектории механической системы, которая порождается этим управлением. Исследование является развитием предложенного ранее подхода к задаче реконструкции управлений для аффинно-управляемых детерминированных динамических систем с невыпуклыми геометрическими ограничениями на управления [1, 2]. Этот подход опирается на вспомогательные конструкции из задач вариационного исчисления. Особенностью этого подхода является использование невыпуклых функционалов невязки во вспомогательных задачах.

В докладе рассматриваются механические системы с невыпуклыми геометрическими ограничениями на управления, при которых наблюдаемая фазовая траектория может порождаться скользящими управлениями. Предлагается корректная постановка задачи и метод ее решения, который опирается на предложенный ранее подход [1, 2] к решению задач реконструкции управлений. Выведены условия на входные данные задачи, обеспечивающие устойчивость решения к возмущению входных данных.

## 2. Постановка ЗРУ

*2.1. Динамика.* Рассматриваются механические аффинно-управляемые системы вида

$$\frac{dx(t)}{dt} = v(t), \quad \frac{dv(t)}{dt} = G(t, x(t), v(t))u(t) + f(t, x(t), v(t)), \quad (1)$$
$$x : [0, T] \rightarrow R^n, \quad v : [0, T] \rightarrow R^n, \quad u : [0, T] \rightarrow R^m, \quad t \in [0, T].$$

В динамике (1) вектор  $x(t)$  — фазовый траектории,  $v(t)$  — фазовый скорости, а  $u(t)$  — управления.

---

<sup>1</sup>ИММ УрО РАН, Екатеринбург, Россия

Известны геометрические ограничения на значения управлений

$$u(t) \in \mathbf{U} \text{ п. в. на } [0, T], \quad (2)$$

где  $\mathbf{U} \subset R^m$  — компакт (вообще говоря, невыпуклый).

При невыпуклых геометрических ограничениях на управления в динамике (1) могут возникать движения, порождаемые скользящими управлениями [3].

*2.2. Входные данные ЗПУ.* Наблюдается некоторая фазовая траектория  $x^*(\cdot) : [0, T] \rightarrow R^n$  системы (1), порождаемая неизвестным управлением, удовлетворяющим ограничениям (2). Наблюдаемая фазовая траектория может порождаться в том числе и скользящим управлением.

Известны неточные дискретные замеры наблюдаемой траектории. Абсолютная погрешность замеров  $\delta > 0$ . Шаг замеров  $h > 0$ . Предполагается, что

$$h = h(\delta) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0.$$

Точки замеров  $y_i^\delta$  поступают в моменты времени  $t_i$ :

$$\|y_i^\delta - x^*(t_i)\| \leq \delta, \quad t_i = ih, \quad t_N = T = Nh, \quad N = \lceil T/h \rceil. \quad (3)$$

*2.3. Предположения.* Вводятся следующие предположения:

1. Существуют константы  $d_0 > 0$ ,  $\delta_0 > 0$ ,  $h_0 > 0$  и компакты  $\Psi_x \subset R^n$ ,  $\Psi_v \subset R^n$  такие, что при любых параметрах замеров  $\delta \in (0, \delta_0]$ ,  $h \in (0, h_0]$  выполняются следующие условия:

$$\bigcup_{i=0, \dots, N} B_{d_0}[y_i^\delta] \subset \Psi_x, \quad \bigcup_{i=0, \dots, N} B_{d_0}[w_i] \subset \Psi_v,$$

где  $B_{d_0}[y_i^\delta]$  — замкнутый шар радиуса  $d_0$  с центром в точке замеров  $y_i^\delta$  (3). Здесь  $w_i$  — аппроксимации фазовых скоростей  $v^*(\cdot)$ , построенные по формуле разностных производных:

$$\begin{aligned} w_i &= \frac{y_{i+1}^\delta - y_i^\delta}{h}, \quad i = 0, \dots, N-1, \\ w_N &= \frac{y_N^\delta - y_{N-1}^\delta}{h}. \end{aligned} \quad (4)$$

2. Матрица  $G(t, x, v)$  и вектор  $f(t, x, v)$  в динамике (1) непрерывны по времени и локально липшицевы по переменным  $(x, v)$  при  $(t, x, v) \in D_0 \triangleq [0, T] \times \Psi_x \times \Psi_v$ .

3. При  $(t, x, v) \in D_0$  ранг матрицы  $G(t, x, v)$  равен  $\min\{n, m\}$ .

2.4. *Нормальное управление.* Для описания воздействия скользящих режимов на динамику (1) используется теория обобщенных управлений [4]. На основании этой теории вводится понятие нормального управления [1, 2].

**Определение 1.** Нормальное управление — измеримая функция  $u^*(\cdot) : [0, T] \rightarrow R^m$ , порождающая траекторию  $x^*(\cdot)$  системы (1), удовлетворяющая овыщукленным ограничениям

$$u(t) \in \text{co } \mathbf{U} \text{ п.в. на } [0, T] \quad (5)$$

и имеющая минимальную норму в пространстве  $L^2$ .

**Предложение 1.** *Нормальное управление  $u^*(\cdot)$  для траектории  $x^*(\cdot)$  динамики (1), (2) единственно.*

Справедливость этого утверждения следует из строгой выпуклости  $L^2$  нормы.

2.5. *Постановка ЗРУ.* Построить на основании замеров (3) наблюдаемой траектории  $x^*(\cdot)$ , полученных для параметров  $\delta \in (0, \delta_0]$  и  $h \in (0, h_0]$ , кусочно-постоянные управления  $u_\delta(\cdot) : [0, T] \rightarrow R^m$  такие, что

1. Они удовлетворяют заданным невыпуклым геометрическим ограничениям (2)

$$u_\delta(t) \in \mathbf{U}, \quad t \in [0, T].$$

2. Траектории  $x_\delta(\cdot)$  и скорости  $v_\delta(\cdot)$ , порожденные этими управлениями, равномерно сходятся к наблюдаемой фазовой траектории и соответствующей фазовой скорости:

$$\begin{aligned} \|x_\delta(\cdot) - x^*(\cdot)\|_C &\xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0, \\ \|v_\delta(\cdot) - v^*(\cdot)\|_C &\xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0. \end{aligned} \quad (6)$$

3. Эти управления слабо в  $L^2$  сходятся к нормальному управлению  $u^*(\cdot)$ :

$$\int_0^T \langle \varphi(t), u_\delta(t) - u^*(t) \rangle dt \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0 \quad \forall \varphi(\cdot) \in L^2([0, T], R^m). \quad (7)$$

### 3. Решение ЗРУ

Сведем исходную ЗРУ 1–3 для систем (1) к задаче, метод решения которой уже известен и описан в работах [1, 2]. Особенностью этого метода является использование вспомогательных вариационных задач для невыпуклых функционалов вида

$$I(x(\cdot), u(\cdot)) = \int_0^T \left[ -\frac{\|x(t) - y^\delta(t)\|^2}{2} + \alpha^2 \frac{\|u(t)\|^2}{2} \right] dt. \quad (8)$$

Здесь  $\alpha > 0$  — малый регуляризирующий [5] параметр, а функция  $y^\delta(\cdot) : [0, T] \rightarrow R^n$  — интерполяция кубическими сплайнами известных дискретных замеров фазовых траекторий (3).

Для наблюдаемой траектории  $x^*(\cdot)$  вводится вспомогательная редуцированная динамика

$$\begin{aligned} \frac{dv(t)}{dt} &= G^*(t, v(t))q(t) + f^*(t, v(t)), \quad v \in R^n, \\ G^*(t, v(t)) &\triangleq G(t, x^*(t), v(t)), \quad f^*(t, v(t)) \triangleq f(t, x^*(t), v(t)). \end{aligned} \quad (9)$$

Доказана следующая лемма.

**Лемма 1.** *Нормальное управление  $u^*(\cdot)$ , порождающее траекторию  $(x^*(\cdot), v^*(\cdot))$  системы (1), совпадает с нормальным управлением, порождающим траекторию  $v^*(\cdot)$  системы (9).*

*3.1. Аппроксимация скоростей.* Необходимо заметить, что в постановке исходной ЗРУ 1–3 замеры (3) дают информацию лишь о фазовой траектории  $x^*(\cdot)$ . В то время как для решения ЗРУ для редуцированной системы (9) требуются информация о фазовых скоростях для того, чтобы можно было применить подход, описанный в [1, 2]. Предлагается следующий способ построения аппроксимаций значений вектора скоростей.

Пусть  $\tilde{h}$  — шаг построения аппроксимаций скоростей. Применим формулы разностных производных для построения аппроксимаций скоростей  $w_j^\delta$ :

$$w_j^\delta = \frac{y_{j+1}^\delta - y_j^\delta}{\tilde{h}}. \quad (10)$$

Известна (см., например, [6]) оценка неустранимой погрешности разностных формул (10) для  $v^*(\cdot)$  при условии неточности значений

$y_i^\delta$ :

$$\|w_j^\delta - v^*(t_{i_j})\| \leq 0.5K\tilde{h} + 2\frac{\delta}{\tilde{h}}, \quad (11)$$

$$K \triangleq \max_{t \in [0, T]} \left\| \frac{v^*(t)}{dt} \right\| = \max_{(t, x, v) \in D_0, u \in \mathbf{U}} \|G(t, x, v) + f(t, x, v)\|.$$

На основании этой оценки доказано следующее утверждение.

**Утверждение 1.** Пусть параметры  $\delta$ ,  $h$ ,  $\tilde{h}$ ,  $\alpha$  стремятся к нулю в согласовании

$$\frac{0.5K\tilde{h} + 2\frac{\delta}{\tilde{h}}}{h} \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0, \quad 0 < \frac{\alpha}{h^2} \leq K_0 < \infty. \quad (12)$$

Тогда решение ЗРУ для редуцированной системы (9), построенное по алгоритму, описанному в [1, 2], на основании аппроксимаций (10) удовлетворяет условиям ЗРУ 1–3 для исходной системы (1).

## 4. Пример

Проиллюстрируем применение описанного метода решения ЗРУ на примере механической модели трехзвенного пружинно-массового демпфера с управляемыми коэффициентами жесткости и вязким трением. Схема модели представлена на Рис. 1.

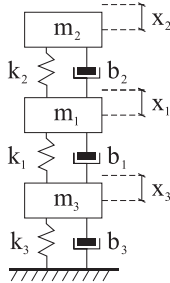


Рис. 1: Схема трехзвенного демпфера.

Динамика модели описывается системой

$$\begin{aligned}
 \left( \frac{dx_1(t)}{dt}, \frac{dx_2(t)}{dt}, \frac{dx_3(t)}{dt} \right)^\top &= (v_1(t), v_2(t), v_3(t))^\top, \\
 m_1 \frac{dv_1(t)}{dt} &= -(x_1(t) - x_3(t))k_1(t) + (x_2(t) - x_1(t))k_2(t) \\
 &\quad - b_1(v_1(t) - v_3(t)) + b_2(v_2(t) - v_1(t)), \\
 m_2 \frac{dv_2(t)}{dt} &= -(x_2(t) - x_1(t))k_2(t) - b_2(v_2(t) - v_1(t)), \\
 m_3 \frac{dv_3(t)}{dt} &= (x_1(t) - x_3(t))k_1(t) - x_3(t)k_3(t) \\
 &\quad + b_1(v_1(t) - v_3(t)) - b_3v_3(t), \\
 m_1 &= 2, \quad m_2 = 4, \quad m_3 = 10, \\
 b_1 &= 0.1, \quad b_2 = 0.2, \quad b_3 = 0.3, \quad t \in [0, 10].
 \end{aligned} \tag{13}$$

Фазовые переменные — отклонения объектов от положения статического равновесия  $x_1(\cdot), x_2(\cdot), x_3(\cdot)$  и их скорости  $v_1(\cdot), v_2(\cdot), v_3(\cdot)$ .

Параметры  $b_1, b_2, b_3 > 0$  — коэффициенты вязкого трения. Роль управлений играют коэффициенты жесткости  $u(t) = (k_1(t), k_2(t), k_3(t))^\top$ , которые считаются переменными.

На управления накладываются невыпуклые ограничения в форме двухточечного множества.

$$k_i(t) \in \mathbf{U} = \{0; 5\}, \quad i = 1, 2, 3. \tag{14}$$

Численно построена наблюдаемая фазовая траектория системы  $x^*(\cdot) = (x_1^*(\cdot), x_2^*(\cdot), x_3^*(\cdot))^\top$ , порожденная управлением

$$k_1(t) \equiv 5, \quad k_2(t) = 2.5 \sin(t) + 2.5, \quad k_3(t) = \begin{cases} 5, & t \in [0, 0.5T], \\ 0, & t \in [0.5T, T] \end{cases}.$$

Это управление совпадает с нормальным управлением, порожденным скользящим режимом.

Замеры наблюдаемой траектории  $x^*(\cdot)$  были получены путем возмущения этой траектории с погрешностью  $\gamma = 0.01$  со случайным равномерным распределением. Шаг замеров  $h = T/2500 = 0.01$ . Эти данные были использованы в качестве входных данных (3) для ЗРУ. Следуя предложенному методу, на их основании

были построены кубическая интерполяция  $y^\gamma(\cdot)$  замеров наблюдаемой траектории и аппроксимации фазовых скоростей  $w_j^\gamma$  (??). Шаг аппроксимации скоростей  $\tilde{h} = T/50 = 0.2$ . После чего была решена вспомогательная ЗРУ для редуцированной системы

$$\begin{aligned} m_1 \frac{v_1(t)}{dt} &= -(y_1^\gamma(t) - y_3^\gamma(t))k_1(t) + (y_2^\gamma(t) - y_1^\gamma(t))k_2(t) \\ &\quad - b_1(v_1(t) - v_3(t)) + b_2(v_2(t) - v_1(t)), \\ m_2 \frac{v_2(t)}{dt} &= -(y_2^\gamma(t) - y_1^\gamma(t))k_2(t) - b_2(v_2(t) - v_1(t)), \\ m_3 \frac{v_3(t)}{dt} &= (y_1^\gamma(t) - y_3^\gamma(t))k_1(t) - y_3^\gamma(t)k_3(t) \\ &\quad + b_1(v_1(t) - v_3(t)) - b_3v_3(t). \end{aligned}$$

Решение этой вспомогательной задачи является решением и исходной ЗРУ. Результаты расчетов приведены на Рис. 2 — аппроксимации управлений и Рис. 3 — реконструированные траектории.

## 5. Литература

- [1] *Subbotina N. N., Krupennikov E. A.* Variational approach to construction of piecewise-constant approximations of the solution of dynamic reconstruction problem // *Differential equations, mathematical modeling and computational algorithms*. Cham, Springer. 2023. vol. 423, pp. 227–242. doi: 10.1007/978-3-031-28505-9\_16.
- [2] *Субботина Н. Н., Крупенников Е. А.* К задаче реконструкции управлений при невыпуклых ограничениях // *Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН*. 2024. Т. 30, № 2. С. 188–202. doi: 0.21538/0134-4889-2024-30-2-188-202.
- [3] *Уткин В. И.* Скользящие режимы в задачах оптимизации и управления. М.: Наука, 1981. 368 с.
- [4] *ГамкRELИДзе Р. В.* Основы оптимального управления. Тбилиси: Изд-во Тбилисского ун-та, 1975. 230 с.
- [5] *Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1974. 224 с.
- [6] *Рябенский В. С., Филиппов А. Ф.* Об устойчивости разностных уравнений. М.: Гостехиздат, 1956.

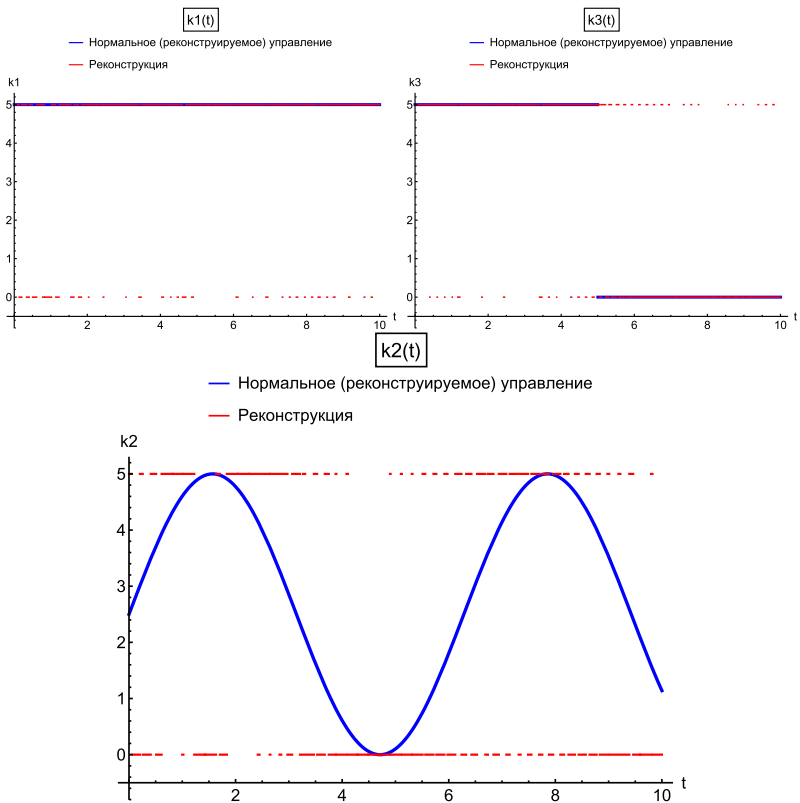


Рис. 2: Аппроксимация нормального управления. Синий цвет — нормальное управление. Красный — его аппроксимация.

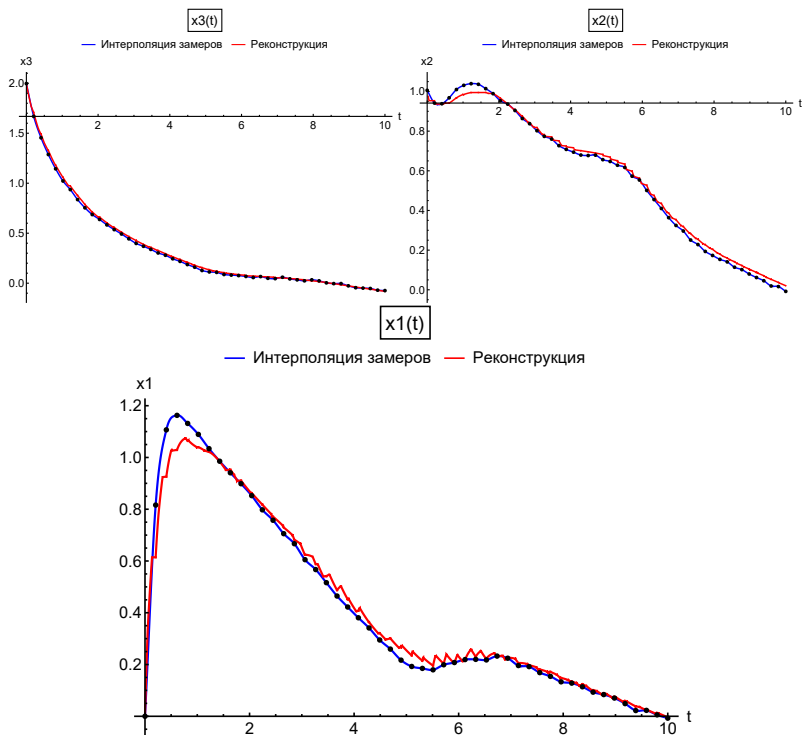


Рис. 3: Восстановленные траектории. Синий цвет — интерполяция замеров. Красный — траектория, порождаемая аппроксимирующим управлением.