

# Обобщенные характеристики и вязкостные решения уравнений Гамильтона — Якоби с некоэрцитивным гамильтонианом

*Л. Г. Шагалова*<sup>1</sup>

e-mail: shag@imm.uran.ru

## 1. Рассматриваемые задачи

Пусть заданы момент времени  $T > 0$  и непрерывно дифференцируемые функции  $f(\cdot) : R \rightarrow R$  и  $g(\cdot) : R \rightarrow R$ . При этом предполагаем, что  $f(\cdot)$  является строго возрастающей, а  $g(\cdot)$  — строго убывающей, и существуют точки  $x_*$  и  $x^*$ ,  $x_* < x^*$  такие, что

$$f(x_*) = 0, \quad g(x^*) = 0.$$

В ограниченной замкнутой области  $\Pi = [0, T] \times [x_*, x^*]$  рассмотрим уравнение Гамильтона — Якоби вида

$$\partial u / \partial t + H(x, \partial u / \partial x) = 0 \tag{1}$$

совместно с начальным условием

$$u(0, x) = u_0(x), \quad x \in [x_*, x^*], \tag{2}$$

где  $u_0(\cdot)$  — заданная непрерывно дифференцируемая функция.

Требуется исследовать вопросы существования и единственности непрерывного вязкостного решения [1] задачи Коши (1), (2) при условии, что гамильтониан  $H$  задан одной из двух представленных ниже формул.

**Задачей А** будем называть задачу (1), (2) в случае, когда гамильтониан имеет вид

$$H(x, p) = h(x) + f(x)e^p + g(x)e^{-p}. \tag{3}$$

---

<sup>1</sup>Институт математики и механики имени Н. Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург, Россия

**Задачей В** будем называть задачу ((1), (2) с гамильтонианом вида

$$H(x, p) = h(x) - f(x)e^p - g(x)e^{-p}. \quad (4)$$

Функция  $h(\cdot)$  в формулах (3) и (4) задана и является непрерывно дифференцируемой.

Отметим, что задачи с гамильтонианами вида (3) и (4) нетипичны для теории уравнений Гамильтона — Якоби, и для них не выполнены условия известных теорем существования обобщенных решений (в частности, минимаксных [2] и вязкостных). При этом подобные задачи возникают в прикладных исследованиях (см., например, [3]) и требуют изучения.

## 2. Непрерывное вязкостное решение

Обозначим символом  $\Gamma$  множество точек, лежащих на нижней и верхней границах прямоугольника  $\Pi$ .

$$\Gamma = \{(t, x) | t \in (0, T), x \in \{x_*; x^*\}\}$$

Символом  $int\Pi$  обозначим множество внутренних точек  $\Pi$ . Через  $D^-u(t, x)$  и  $D^+u(t, x)$  будем обозначать соответственно субдифференциал и супердифференциал функции  $u(\cdot)$  в точке  $(t, x)$ . Приведем одно из эквивалентных определений вязкостного решения для задачи (1), (2).

**Определение 1.** Непрерывная функция  $u : \Pi \rightarrow R$  называется *вязкостным решением* задачи (1), (2), если она удовлетворяет начальному условию (2) и дифференциальным неравенствам

$$a + H(x, s) \leq 0, \quad \forall (t, x) \in int\Pi, \quad \forall (a, s) \in D^+u(t, x), \quad (5)$$

$$a + H(x, s) \geq 0, \quad \forall (t, x) \in int\Pi \cup \Gamma, \quad \forall (a, s) \in D^-u(t, x). \quad (6)$$

Таким образом, на границе  $\Gamma$  требуется выполнение только одного дифференциального неравенства — неравенства (6) для субдифференциала. Это объясняется тем, что при достаточно общих условиях, накладываемых на гамильтониан и начальную функцию, набор условий (2), (5), (6) обеспечивает единственность вязкостного решения задачи (1), (2).

### 3. Характеристики и вязкостные решения

3.1. *Некоэрцитивность гамильтонианов.* Отметим, что гамильтонианы (3), (4) рассматриваемых задач не удовлетворяют условиям, при которых доказаны известные теоремы существования вязкостных решений. В частности, для этих гамильтонианов не выполнено условие коэрцитивности. Для выпуклого по импульсной переменной  $p$  гамильтониана условие коэрцитивности имеет вид

$$\frac{H(x, p)}{|p|} \rightarrow +\infty \quad \text{при} \quad |p| \rightarrow \infty, \quad (7)$$

а для вогнутого по  $p$  гамильтониана условие коэрцитивности записывается следующим образом

$$\frac{H(x, p)}{|p|} \rightarrow -\infty \quad \text{при} \quad |p| \rightarrow \infty. \quad (8)$$

В формулах (7) и (8)  $|p|$  обозначает модуль числа  $p$ .

Для гамильтонианов (3) и (4) соответствующие условия коэрцитивности нарушаются на линиях  $x = x_*$  и  $x = x^*$ . Таким образом, надо использовать другие подходы к исследованию задач А и В. Одним из таких подходов является метод обобщенных характеристик [4].

3.2. *Существование и единственность вязкостного решения задачи А.* Характеристическая система для задачи А имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{x} &= H_p(x, p) = f(x)e^p - g(x)e^{-p}, \\ \dot{p} &= -H_x(x, p) = -h'(x) - f'(x)e^p - g'(x)e^{-p}, \\ \dot{z} &= pH_p(x, p) - H(x, p) = \\ &= p(f(x)e^p - g(x)e^{-p}) - f(x)e^p - g(x)e^{-p} - h(x) \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь  $H_x(x, p) = \partial H(x, p)/\partial x$ ,  $H_p(x, p) = \partial H(x, p)/\partial p$ .

Система (9) рассматривается с начальными условиями

$$x(0, y) = y, \quad p(0, y) = u'_0(y), \quad z(0, y) = u_0(y), \quad y \in [x_*; x^*]. \quad (10)$$

Решения системы (9), (10) называются характеристиками. Компоненты  $x(\cdot, y)$ ,  $p(\cdot, y)$  и  $z(\cdot, y)$  решения называются соответственно фазовыми, импульсными и ценовыми характеристиками.

В [5] доказано следующее утверждение.

**Теорема 1.** *Непрерывное вязкостное решение задачи А существует и единственно. Это решение является субдифференцируемой функцией и может быть построено с помощью характеристик в соответствии с репрезентативной формулой  $u(t, x) =$*

$$\min_{x(t,y)=x} \left\{ u_0(y) + \int_0^t (p(\tau)H_p(x(\tau), p(\tau)) - H(x(\tau), p(\tau))) d\tau \right\}, \quad (11)$$

где  $x(t) = x(t, y)$  и  $p(t) = p(t, y)$  — соответственно фазовая и импульсная компоненты решения характеристической системы (9), (10), определяемого параметром  $y \in [x_*, x^*]$ .

3.3. *Несуществование непрерывного вязкостного решения задачи В.* Характеристическая система задачи В имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{x} &= H_p(x, p) = -f(x)e^p + g(x)e^{-p}, \\ \dot{p} &= -H_x(x, p) = -h'(x) + f'(x)e^p + g'(x)e^{-p}, \\ \dot{z} &= pH_p(x, p) - H(x, p) = \\ &= p(-f(x)e^p + g(x)e^{-p}) + f(x)e^p + g(x)e^{-p} - h(x). \end{aligned} \quad (12)$$

Система (12) рассматривается с начальными условиями (10).

Исследование поведения решений системы (12), (10) показывает, что возможны ситуации непродолжимости характеристик, когда значения импульсных компонент бесконечно убывают или возрастают, стремясь соответственно к  $-\infty$  и  $+\infty$ . При этом соответствующие фазовые компоненты решения стремятся соответственно к значениям  $x^*$  и  $x_*$ , но не достигают их. Кроме того, в  $\Pi$  существуют области, через точки которых не проходит ни одна фазовая характеристика. В [6, 7] приведены примеры таких ситуаций и подробный анализ поведения характеристик для гамильтониана вида

$$H(x, p) = h(x) - \frac{1+x}{2}e^{2p} - \frac{1-x}{2}e^{-2p}.$$

Покажем, что если в некоторой точке границы  $\Gamma$  субдифференциал функции  $u(\cdot)$  непуст, тогда эта функция не может быть вязкостным решением задачи В. Пусть, для определенности, существует  $t_* \in (0, T)$  такое, что  $(a, s) \in D^-u(t_*, x^*)$ . Тогда из определения субдифференциала следует, что для любого  $k > 0$  справедливо

включение  $(a, s + k) \in D^-u(t_*, x^*)$ . В этом случае неравенство (6), которому должно удовлетворять вязкостное решение, принимает вид

$$a + h(x^*) - f(x^*)e^{s+k} \geq 0 \quad \forall k > 0. \quad (13)$$

Поскольку  $f(x^*) > 0$ , неравенство (13) не выполняется.

Таким образом, для задачи В в общем случае невозможно построить непрерывное вязкостное решение и для её исследования обобщенное решение нужно определять иначе.

#### 4. Литература

- [1] *Crandall M.G., Lions P.L.* Viscosity solutions of Hamilton–Jacobi equations // Trans. Amer. Math. Soc. 1983. Vol. 277, no. 1. P. 1–42. DOI: 10.1090/S0002-9947-1983-0690039-8
- [2] *Субботин А.И.* Минимаксные неравенства и уравнения Гамильтона–Якоби. М.: Наука, 1991.
- [3] *Saakian D.B., Rozanova O., Akmetzhanov A.* Dynamics of the Eigen and the Crow–Kimura models for molecular evolution // Physical Review E – Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics. 2008. Vol. 78, iss. 4. 041908 DOI: 10.1103/PhysRevE.78.041908
- [4] *Subbotina N.N.* The method of characteristics for Hamilton–Jacobi equation and its applications in dynamical optimization // Modern Mathematics and its Applications. 2004. Vol. 20. P. 2955–3091.
- [5] *Shagalova L.G.* On generalized solutions for two Hamilton–Jacobi equations with state constraints // Contributions to Game Theory and Management. 2024. Vol. 17. P 209–218.
- [6] *Субботина Н.Н., Шагалова Л.Г.* О решении задачи Коши для уравнения Гамильтона — Якоби с фазовыми ограничениями // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 2. С. 191–208.
- [7] *Субботина Н.Н., Шагалова Л.Г.* О непрерывном продолжении обобщенного решения уравнения Гамильтона — Якоби характеристиками, образующими центральное поле экстремалей // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2015. Т. 21, № 2. С. 220–235.