

Непрерывное решение задачи Дирихле для уравнения эйконала в дополнении к области, ограниченной овалом Кассини

Н. Н. Субботина¹, Д. В. Шемякин²

e-mail: subb@uran.ru, zbhgvsnz@gmail.com

Рассмотрим на плоскости \mathbb{R}^2 множество $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \phi(x_1, x_2) \geq 0\}$, где его граница $\partial\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \phi(x_1, x_2) = 0\}$ — овал Кассини. Пусть на \mathbb{R}^2 задана дважды непрерывно дифференцируемая функция $u_0(x)$.

Уравнение эйконала на плоскости имеет вид:

$$\left(\frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_2}\right)^2 = 1. \quad (1)$$

Определим в пространстве \mathbb{R}^3 краевое многообразие

$$C_0 = \{(x_0, u_0) \in \mathbb{R}^3 : x_0 \in \partial\Omega, u_0 = u_0(x_0)\}. \quad (2)$$

Отметим, что точки из рассматриваемого овала Кассини можно в полярных координатах (ρ, φ) описать следующим образом:

$$\rho^4 - 2c^2\rho^2 \cos(2\varphi) - a^4 + c^4 = 0, \quad \varphi \in [0, 2\pi]; \quad 1 < \frac{a}{c} < \sqrt{2} \quad (3)$$

Следовательно, точки краевого многообразия (2) можно описать в параметрической форме

$$C_0 = \{(x_0, u_0) : x_0 = x_0(y), u_0 = u_0(x_0(y)), \phi(x_0(y)) = 0; y = \varphi \in [0, 2\pi]\}$$

Задача Дирихле состоит в том, чтобы построить на плоскости такую функцию $u(x)$, которая в области Ω удовлетворяет уравнению (1) и график которой проходит через многообразие (2),(3).

Введём обозначения $u = z$, $u_{x_1} = s_1$, $u_{x_2} = s_2$ и перепишем уравнение (1) в виде

$$F(x, z, s) = 1 - s_1^2 - s_2^2 = 0. \quad (4)$$

¹Институт математики и механики УрО РАН, Екатеринбург, Россия

²Уральский федеральный университет, Екатеринбург, Россия

Рассмотрим характеристическую систему[1] для уравнения (4):

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = \frac{\partial F(x(t), z(t), s(t))}{\partial s_1}; \\ \frac{dx_2}{dt} = \frac{\partial F(x(t), z(t), s(t))}{\partial s_2}; \\ \frac{ds_1}{dt} = -\frac{\partial F(x(t), z(t), s(t))}{\partial x_1} - \frac{\partial F(x(t), z(t), s(t))}{\partial z} \cdot s_1; \\ \frac{ds_2}{dt} = -\frac{\partial F(x(t), z(t), s(t))}{\partial x_2} - \frac{\partial F(x(t), z(t), s(t))}{\partial z} \cdot s_2; \\ \frac{dz}{dt} = s_1 \cdot \frac{\partial F(x(t), z(t), s(t))}{\partial s_1} + s_2 \cdot \frac{\partial F(x(t), z(t), s(t))}{\partial s_2}, \end{cases} \quad (5)$$

где $t \geq 0$. Решение этой системы: $x(t) = (x_1(t), x_2(t)) \in \mathbb{R}^2$ — фазовая характеристика, $s(t) = (s_1(t), s_2(t)) \in \mathbb{R}^2$ — импульсная характеристика, $z(t)$ — ценовая характеристика.

Зададим начальные условия при $t = 0$. Согласно (2)(3) полагаем:

$$x_1(0, y) = x_{10}(y), \quad x_2(0, y) = x_{20}(y), \quad z(0, y) = u_0(x_0(y)). \quad (6)$$

Начальные условия $s_0(y) = (s_{10}(y), s_{20}(y)) = (s_{10}, s_{20})$ для импульсной переменной найдём из системы двух уравнений, выполняющихся на краевом многообразии:

$$\begin{cases} s_{10} \frac{\partial x_{10}}{\partial y} + s_{20} \frac{\partial x_{20}}{\partial y} = \frac{\partial z_0}{\partial y}; \\ s_{10}^2 + s_{20}^2 = 1. \end{cases} \quad (7)$$

Проинтегрировав систему (5) с начальными условиями (6),(7), получим:

$$\begin{cases} x_1(t, y) = x_{10}(y) - 2ts_{10}(y), \\ x_2(t, y) = x_{20}(y) - 2ts_{20}(y), \\ s_1(t, y) = s_{10}(y), \\ s_2(t, y) = s_{20}(y), \\ z(t, y) = z_0(y) - 2t. \end{cases} \quad (8)$$

Допустимыми назовем фазовые характеристики $x(t, y)$, которые удовлетворяют условию:

$$x_0(y) \in \partial\Omega, x(t, y) \in \Omega, \forall t \geq 0 \quad (9)$$

Критерием выполнения (9) является проверка условия

$$\langle s_0(y), n(y) \rangle \geq 0, \quad (10)$$

где $n(y)$ — внешняя нормаль к множеству

$$\Omega_0 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \phi(x_1, x_2) \leq 0\}$$

в точке его границы $x_0(y)$, где $\phi(x_0(y)) = 0$.

Определим функцию

$$u(x) = \max_{y: x(t,y)=x} \{z(t, y)\}, \quad x \in \Omega. \quad (11)$$

Справедливы следующие утверждения:

Теорема 1. Функция $u(x)$, полученная методом характеристик (11), удовлетворяет краевому условию Дирихле (2), (3). Она непрерывна на Ω , является локально липшицевой и супердифференцируемой в каждой точке дополнения к множеству Ω_0 на \mathbb{R}^2 и принадлежит классу устойчивости по Кружкову $E(\Omega)/2$.

Теорема 2. Функция $u(x)$ вида (11), является единственным энтропийным решением [2] задачи Дирихле (1),(3) и совпадает с минимаксным решением [1] этой задачи.

Пример 1. Рассмотрим случай, когда $u_0(x) = 1$.

Вычислив производные $\frac{\partial x_{10}(y)}{\partial y} = \frac{\partial x_{10}}{\partial y}$, $\frac{\partial x_{20}(y)}{\partial y} = \frac{\partial x_{20}}{\partial y}$, $\frac{\partial u_0(x_0(y))}{\partial y} = \frac{\partial z_0}{\partial y}$ и подставив их в (7), получим:

$$\begin{cases} -4\sin(2y)s_1 + \cos(y)\cos(2y)s_2 = 3\cos(y)\cos(2y); \\ s_1^2 + s_2^2 = 1 \end{cases} \quad (12)$$

Решая эту систему, найдем две группы начальных условий:

$$\begin{cases} s_1(0, y) = 0; \\ s_2(0, y) = 1. \end{cases} \quad (13)$$

$$\begin{cases} s_1(0, y) = \frac{24\sin(4y)}{-25+7\cos(4y)}; \\ s_2(0, y) = \frac{7-25\cos(4y)}{-25+7\cos(4y)}. \end{cases} \quad (14)$$

и проинтегрируем систему (5) с условиями (6), (13) и (6),(14).

Интегральная поверхность $P = \{(x(t, y), z(t, y))\}$ для допустимых характеристик системы (5) совпадает с графиком функции $u(x)$, полученной методом характеристик (11), т.е. является графиком классического решения задачи Дирихле (1)-(3) при $u_0(x) = 1$.

Пример 2. Полагаем

$$u_0(x_1, x_2) = x_2 + 1$$

Протределаем те же действия, получим две группы начальных условий. Проинтегрировав систему (5) с каждой из них, получим:

$$\begin{cases} x_1(t, y) = (2 + \cos 2y) \cos y, \\ x_2(t, y) = (2 + \cos 2y) \sin y - 2t, \\ s_{11}(t, y) = 0, \\ s_{21}(t, y) = 1, \\ z(t, y) = (2 + \cos 2y) \sin y + 1 - 2t. \end{cases} \quad (15)$$

$$\begin{cases} x_1(t, y) = (2 + \cos 2y) \cos(y) - 2t \frac{24 \sin 4y}{-25+7 \cos 4y}, \\ x_2(t, y) = (2 + \cos 2y) \sin(y) - 2t \frac{7-25 \cos 4y}{-25+7 \cos 4y}, \\ s_{11}(t, y) = \frac{24 \sin 4y}{-25+7 \cos 4y}, \\ s_{21}(t, y) = \frac{7-25 \cos 4y}{-25+7 \cos 4y}, \\ z(t, y) = (2 + \cos 2y) \sin(y) + 1 - 2t. \end{cases} \quad (16)$$

На рисунке 2 изображена интегральная поверхность $P_1 = \{(x(t, y), z(t, y))\}$ для характеристик (15), удовлетворяющих условию (10). На рисунке 3 изображена интегральная поверхность $P_2 = \{(x(t, y), z(t, y))\}$ для характеристик (16), удовлетворяющих условию (10).

На рисунке 4 изображена склейка интегральных поверхностей P_1 и P_2 , которая является гладкой. После отрезания внутренней воронки интегральной поверхности P_2 получившаяся поверхность является непрерывной, но не гладкой по линии отрезания. Она совпадает с графиком функции $u(x)$ вида (11) - обобщенным решением задачи Дирихле (1)-(3) с краевой функцией $u_0(x) = 1 + x_2$.

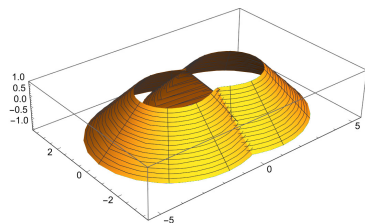


Рис. 1: Интегральная поверхность P

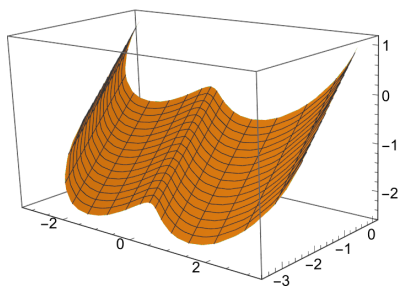


Рис. 2: Интегральная поверхность P_1

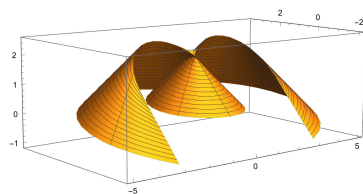


Рис. 3: Интегральная поверхность P_2

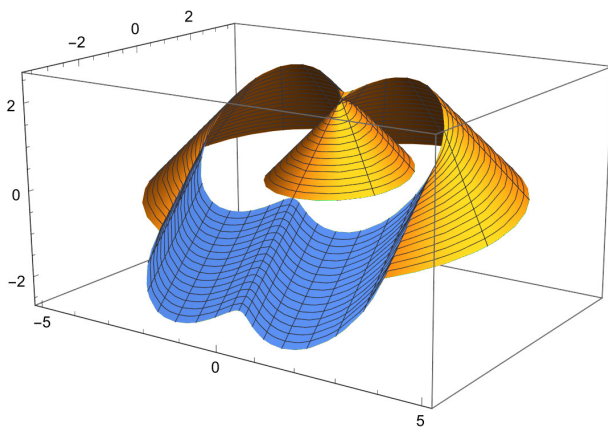


Рис. 4: Склейка P_1 и P_2

Полученные результаты близки результатам работы [3] о решении задачи Коши - Дирихле для уравнении эйконала.

- [1] *Субботин А.И.* Обобщенные решения уравнений в частных производных первого порядка. Перспективы динамической оптимизации. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. С. 12–19, 27–28, 38–40, 240–245, 284–286.
- [2] *Кружков С.Н.* Обобщенные решения уравнений Гамильтона-Якоби типа эйконала. I. Постановка задач, теоремы существования, единственности и устойчивости, некоторые свойства решений // Математический сборник. 1975. Т. 98(140), № 3(11). С. 450–493.
- [3] *Лебедев П.Д., Успенский А.А., Ушаков В.Н.* Построение минимаксного решения уравнения типа эйконала // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2008. Т. 14, № 2. С. 182–191.