

Об одном свойстве углов фокальных радиусов эллипса

Г. И. Трубников¹,
e-mail: jora_it@mail.ru

В плоскости x, y рассмотрим эллипс с большой полуосью a , малой полуосью b , фокальным расстоянием c и фокусами F_1, F_2 (рис. 1). Фокус F_1 находится в начале координат, фокус $F_2 \neq F_1$ лежит в точке $(2c, 0)$. Возьмем на эллипсе произвольную точку M с неположительной координатой по оси y . Точке M поставим в соответствие два угла $\beta_2 = \pi - \angle F_1MF_2$ и $\beta_1 = \angle F_2F_1M$. Условимся, что $\beta_1 \leq 0, \beta_2 > 0$. Положение точки M задается однозначно расстоянием от нее до фокуса F_1 , иными словами, через длину r_1 фокального радиуса F_1M . Тогда величины углов становятся функциями $\beta_1 = \beta_1(r_1), \beta_2 = \beta_2(r_1)$ от значения r_1 . Положим $\beta = \beta_2 - \beta_1$. Оказывается, что для непрерывной функции $r_1 \rightarrow \beta(r_1) = \beta_2(r_1) - \beta_1(r_1)$ можно указать промежутки монотонности на всей области значений $r_1 \in [a - c, a + c]$.

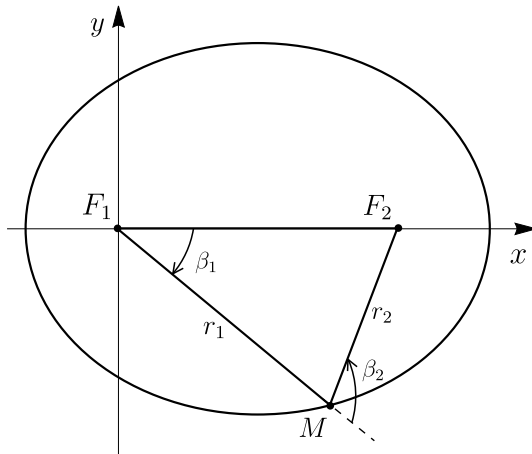


Рис. 1: Эллипс, M – произвольная точка на нижней границе

¹Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского, Екатеринбург

Утверждение. Если значения a и c таковы, что $4a/3 \geq a + c$, то функция $\beta(r_1)$ строго убывает на всей области определения $[a - c, a + c]$. Если $4a/3 < a + c$, то функция $\beta(r_1)$ строго убывает на $[a - c, 4a/3]$ и строго возрастает на $[4a/3, a + c]$.

Схема доказательства. Рассмотрим ломаную F_1MF_2 , соединяющую фокусы F_1, F_2 и произвольную точку M на нижней дуге эллипса (рис. 1). Фокальные радиусы $F_1M = r_1$ и $F_2M = r_2$ связаны равенством $r_1 + r_2 = 2a$. Координаты фокуса F_2 с учетом введенных обозначений имеют вид

$$\begin{aligned} 2c &= r_1 \cos \beta_1 + r_2 \cos (\beta_2 + \beta_1), \\ 0 &= r_1 \sin \beta_1 + r_2 \sin (\beta_2 + \beta_1). \end{aligned} \quad (1)$$

Запишем сумму квадратов левых и правых частей (1):

$$4c^2 = r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2 \cos (\beta_2 + \beta_1 - \beta_1).$$

Отсюда выразим $\cos \beta_2$:

$$\cos \beta_2 = \frac{4c^2 - r_1^2 - r_2^2}{2r_1r_2}. \quad (2)$$

Используя выражение (2), перепишем формулы (1), заменив в них β_1 на разность $\beta_2 - \beta$ и сгруппировав слагаемые при $\cos \beta, \sin \beta$. Получаем следующие равенства:

$$\begin{aligned} 2c &= s_1(r_1) \cos \beta + s_2(r_1) \sin \beta, \\ 0 &= s_2(r_1) \cos \beta - s_1(r_1) \sin \beta. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь

$$\begin{aligned} s_1(r_1) &= \frac{4c^2 - r_1^2 - 3r_2^2}{2r_2} + \frac{(4c^2 - r_1^2 - r_2^2)^2}{2r_1^2r_2}, \\ s_2(r_1) &= \frac{4c^2 - r_2^2}{r_1} \sqrt{1 - \left(\frac{4c^2 - r_1^2 - r_2^2}{2r_1r_2} \right)^2}. \end{aligned} \quad (4)$$

Непосредственным вычислением проверяется равенство

$$s_1(r_1)^2 + s_2(r_1)^2 = 4c^2.$$

Это позволяет ввести величину $\sigma(r_1)$ так, чтобы для нее выполнялись соотношения

$$s_1(r_1) = 2c \cos \sigma(r_1), \quad s_2(r_1) = 2c \sin \sigma(r_1). \quad (5)$$

Подставив (5) в (3), установим связь между величинами $\beta(r_1)$ и $\sigma(r_1)$:

$$\beta(r_1) - \sigma(r_1) = 2\pi k, \quad k - \text{некоторое целое число.}$$

Функции $s_1(r_1)$ и $s_2(r_1)$, введенные формулами (4), могут быть подробно исследованы. На основе свойств этих функций получаем, что если для эллипса выполнено неравенство $4a/3 \geq a + c$, то величина $\sigma(r_1)$, как функция от r_1 , монотонно убывает на всем промежутке $[a - c, a + c]$. Если $4a/3 < a + c$, то $\sigma(r_1)$ монотонно убывает на $[a - c, 4a/3]$ и монотонно возрастает на $[4a/3, a + c]$. В этом случае значение $4a/3$ является точкой минимума функции $r_1 \rightarrow \sigma(r_1)$.

Так как значение $\beta(r_1)$ отличается от $\sigma(r_1)$ лишь на некоторую постоянную величину, делаем вывод, что промежутки и характер монотонности у этих двух функций полностью совпадают. На этом завершается доказательство. \square

Данное утверждение можно считать специальным свойством эллипса. Найти такое свойство или эквивалентное ему в литературе (см., например, [1, 2]), посвященной близким геометрическим конструкциям, не удалось. Скорее всего, выбор углов и рассматриваемой их суммы слишком специфичен, чтобы такое свойство было изучено само по себе. Тем не менее, оно оказывается полезным при решении задачи построения множества достижимости машины Дубинса при импульсном ограничении на управление.

Применение результата

В работе [3] настоящего сборника рассматривается задача о построении множества достижимости машины Дубинса при импульсном ограничении на управление. Показано, что на границу множества достижимости приводят движения в форме ломаных с не более чем двумя звеньями. Возникает вопрос о свойствах ломаных, имеющих минимальный расход импульсного (углового) ресурса. В частности, требуется определить среди всех *двухзвенных* ломаных с одинаковой суммарной длиной звеньев и фиксированными начальной и конечной точками движение с минимальным расходом

импульсного ресурса. Таким образом, потребовалось изучение зависимости величины углов, связанных с фокальными радиусами эллипса. Используемые углы поясняются на рис. 2. Точка F_1 совпадает с начальной точкой двухзвенной ломаной, точка F_2 — с ее конечной точкой.

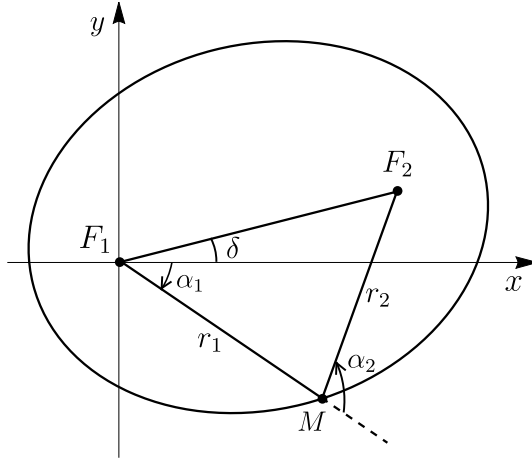


Рис. 2: Применение утверждения к точкам множества достижимости машины Дубинса с импульсным управлением

Изучение вопроса об участке границы множества достижимости, порождаемого *двухзвенными* ломаными, сведено в [3] к ситуации, когда точка F_2 , задаваемая координатами (x_p, y_p) , удовлетворяет условию $y_p \geq 0$. При этом угол $\delta \geq 0$ однозначно определяется координатами точки F_2 . Дополнительно предполагается, что для угла α_1 выполнено неравенство $\alpha_1 \leq 0$. Рассматриваем двухзвенные ломаные с точками излома M не выше оси x . Каждая ломаная имеет длину t_f и характеризуется углами α_1, α_2 . Такие ломаные можно интерпретировать как движения машины Дубинса с импульсным управлением (см. [3]). Число t_f есть время движения при постоянном значении линейной скорости равной 1, а величина $\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$ является расходом импульсного ресурса. При построении множества достижимости с импульсным управлением требуется найти двухзвенную ломаную, обеспечивающую минимум расхода α .

Для поиска ломаной с наименьшим расходом можно применить доказанное выше утверждение. Эллипс будет иметь фокусы F_1 и F_2 , большая полуось $a = t_f/2$, фокальное расстояние $2c = \sqrt{x_p^2 + y_p^2}$. Углы на рис. 1 и рис. 2 связаны равенствами $\alpha_2 = \beta_2, \alpha_1 = \beta_1 + \delta$. Это означает, что $\alpha = \beta + \delta$. Так как угол δ зафиксирован при заданной точке F_2 , то промежутки монотонности и, как следствие, точки минимума функций $\alpha(r_1), \beta(r_1)$ совпадают. Таким образом, всегда можно указать движение с минимальным расходом импульсного ресурса для выбранной точки F_2 . На основе этого факта в работе [3] строится параметрическое описание участка границы множества достижимости, который образован движениями в виде двухзвенных ломаных.

А именно, если выполнено первое условие утверждения, т. е. $\sqrt{x_p^2 + y_p^2} \leq t_f/3$, то минимум по α достигается при $\alpha_1 = 0$ и соответствует движению без начального импульса. Если выполнено противоположное неравенство, то минимум по α достигается либо также при $\alpha_1 = 0$, либо на движении с некоторым $\alpha_1 < 0$ и $r_1 = 2r_2 = 2t_f/3$. Следовательно, получаем два вида качественно различных двухзвенных ломаных линий, которые могут вести на границу множества достижимости машины Дубинса при импульсном ограничении на управление.

Работа выполнена в рамках исследований, проводимых в Уральском математическом центре при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (номер соглашения 075-02-2025-1549).

Литература

- [1] Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1977.
- [2] Ефимов Е.В. Краткий курс аналитической геометрии. М.: Физматлит, 2006.
- [3] Пацко В.С., Трубников Г.И., Федотов А.А. Машина Дубинса: двумерное множество достижимости при импульсном управлении // Материалы IV международного семинара, посвященного 80-летию академика А.И. Субботина. 2026. С. ???-???