

# Двухуровневая оптимизационная модель роста при известных относительных ценах на факторы производства

А. А. Усова<sup>1</sup>, А. М. Тарасьев<sup>1</sup>

e-mail: ausova@imm.uran.ru, tam@imm.uran.ru

## 1. Постановка задачи

В работе рассматривается динамическая модель роста с двумя производственными факторами: капиталом  $x_1$  и рабочей силой  $x_2$ , цены на которые определены экзогенным образом функциями  $p_1(t)$  и  $p_2(t)$ . От этих факторов степенным образом зависит объем выпуска  $y$ ,  $y = ax_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}$ , где  $a$  — общий фактор производительности, учитывающий влияние на объемы производства  $y$  неучтенных в модели показателей, а степени  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  — коэффициенты эластичности производственной функции, удовлетворяющие ограничениям  $\alpha_1, \alpha_2 \in (0, 1)$  и  $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ .

Предполагается, что каждый фактор удовлетворяет динамической модели Солоу, которая постулирует, что рост  $i$ -ого фактора обусловлен вложениями в него  $s_i(t)y(t)$  по ценам  $p_i(t)$ , а снижение — темпами  $\delta_i$  амортизации или размытия ( $\delta_i > 0$ ,  $i = 1, 2$ ):

$$\dot{x}_i(t) = \frac{s_i(t) \cdot y(t)}{p_i(t)} - \delta_i x_i(t), \quad x_i(0) = x_i^0, \quad i = 1, 2. \quad (1)$$

Считая, что система замкнута, можно выразить объемы сбережений  $sv(t)$  из соотношения баланса:

$$\begin{aligned} s_1(t)y(t) + s_2(t)y(t) + sv(t) &= y(t), \\ 0 < sv(t) &= y(t)(1 - s_1(t) - s_2(t)), \\ \text{при условии, что } 0 \leq s_i(t) \leq \bar{s}_i < 1, \quad i &= 1, 2. \end{aligned} \quad (2)$$

В данной модели инвестиции являются регуляторами, за счет которых осуществляется максимизация функционала полезности, выbranного в виде интегрального показателя относительного уровня

---

<sup>1</sup>ИММ УрО РАН, Екатеринбург, Россия

сбережений, дисконтированного на бесконечном промежутке времени, т. е.  $J(\cdot) = \int_0^{+\infty} e^{-\rho t} \ln sv(t) dt$ .

Для описанной динамической модели ставится следующая задача оптимального управления.

**Задача 1** состоит в построении такой стратегии управления  $s(t) = (s_1(t), s_2(t))$ , которая удовлетворяет ограничениям (2) и вдоль траекторий системы (1) максимизирует функцию полезности  $J(\cdot)$ .

Данная задача исследовалась в работах [1–3], в которых, используя принцип максимума Понтрягина, был предложен алгоритм ее решения. В данной статье предлагается разложить эту проблему на две подзадачи, введя понятие цены каждого фактора. Данный подход был предложен А.В. Кряжимским и А.М. Тарасьевым [4].

## 2. Двухуровневая оптимизационная схема

Двухуровневая оптимизационная схема опирается на тот факт, что цены  $p_1(t)$  и  $p_2(t)$  на производственные факторы  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  — известные функции. Стоимость всех факторов производства обозначим символом  $C(t)$ , т. е.  $C(t) = p_1(t)x_1(t) + p_2(t)x_2(t)$ . Рассмотрим декомпозицию задачи управления на две оптимизационные подзадачи.

### 2.1 Решение задачи низкого уровня

Первая задача состоит в максимизации выпуска  $y$  при фиксированной стоимости  $C$  факторов производства, т. е.

$$\begin{aligned} y = ax_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \xrightarrow{x_1, x_2} \max, \quad & x_1 > 0, \quad x_2 > 0, \\ x_1 p_1 + x_2 p_2 = C, \quad & C = \text{const} > 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Оптимизационная задача решается с помощью функции Лагранжа вида  $\mathcal{L}(x, \lambda) = ax_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} + \lambda(C - p_1 x_1 - p_2 x_2)$ . Из необходимых условий оптимальности для факторов производства вытекает свойство пропорциональности [4], а именно

$$\begin{cases} x_1 p_1 = \alpha_1 C \\ x_2 p_2 = \alpha_2 C \end{cases} \Rightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{\alpha_1 p_2}{\alpha_2 p_1}, \Rightarrow \quad (4)$$

$$y = a \left( \frac{\alpha_1}{p_1} \right)^{\alpha_1} \left( \frac{\alpha_2}{p_2} \right)^{\alpha_2} \cdot C(t). \quad (5)$$

Таким образом, отношение производственных факторов обратно пропорционально отношению их цен, а производственная функция линейно зависит от общей стоимости факторов производства в случае с однородной степенной производственной функцией.

## 2.2 Оценка относительных цен

Поскольку задача оптимального управления, описанная в Разделе 1 была ранее решена, и оптимальные решения  $\mathbf{x}_1(t)$  и  $\mathbf{x}_2(t)$  для факторов производства построены, то в силу соотношений (4), полученных при решении оптимизационной задачи первого уровня, можно найти относительные цены  $p(t)$  на факторы производства:

$$p(t) = \frac{p_2(t)}{p_1(t)} = \frac{\alpha_2 \mathbf{x}_1(t)}{\alpha_1 \mathbf{x}_2(t)}. \quad (6)$$

Начальный уровень цен  $p_0 = p(0)$  известен точно, так как известны начальные условия для факторов производства  $p_0 = \frac{\alpha_2 \mathbf{x}_1^0(t)}{\alpha_1 \mathbf{x}_2^0(t)}$ .

Далее, согласно качественному анализу гамильтоновых систем [3], относительный уровень цен имеет уровень насыщения, обусловленный существованием стационарных значений для фазовых переменных:

$$p^* = \left( \frac{\delta_2 + \rho}{\delta_1 + \rho} \right)^2 \frac{\alpha_2 \delta_1 + \rho}{\alpha_1 \delta_2 + \rho}.$$

Для модели роста, исследуемой в работе [3], аппроксимация относительных цен функцией логистического типа

$$p(t) = p_0 + (p_0 - p^*) \left( 1 - \frac{(a_0 + 1)^2 e^{-a_1 t}}{(a_0 + e^{-a_2 t})^2} \right)$$

достаточно точно приближает ( $R^2 = 0.9998$ ) оптимальное отношение факторов производства (6) при следующих значениях ее параметров:  $a_0 = 0.0154$ ,  $a_1 = 7.9685$ ,  $a_2 = 6.5952$  (см. Рис. 1). С учетом однородности производственной функции  $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ , это позволяет переписать соотношения (5) в относительных ценах и стоимости всех факторов производства  $c(t) = C(t)/p_1(t)$ :

$$y = a \left( \frac{\alpha_1}{p_1} \right)^{\alpha_1} \left( \frac{\alpha_2}{p_2} \right)^{\alpha_2} p_1 \cdot c = A \cdot c, \quad A = a \alpha_1^{\alpha_1} \left( \frac{\alpha_2}{p} \right)^{\alpha_2}. \quad (7)$$

Теперь остается найти относительную стоимость всех факторов производства  $c(t)$ , решив задачу второго уровня.

### 2.3 Задача второго уровня

Задача состоит в поиске относительной стоимости  $c(t)$  факторов производства и аналогична исходной **Задаче 1** (см. Раздел 1).

В силу ограничения в оптимизационной задаче низкого уровня (3), получим  $c(t) = C(t)/p_1(t) = x_1(t) + p(t)x_2(t)$ . Следовательно, динамика относительной стоимости рассчитывается исходя из уравнений (1) и свойства пропорциональности (4):

$$\dot{c}(t) = c(t) \left( s(t)A(t) - \alpha_1\delta_1 + \alpha_2 \left( \frac{\dot{p}(t)}{p(t)} - \delta_2 \right) \right), \quad c(0) = c_0. \quad (8)$$

Здесь коэффициент  $A(t)$  определен в (7),  $s(t)$  — суммарные вложения в факторы производства, т.е.  $s(t) = s_1(t) + s_2(t) \in [0, \bar{s}] \subset [0, 1)$ , а начальный уровень стоимости вычисляется по формуле  $c_0 = x_1(0) + p(0)x_2(0)$ .

Функция полезности для данной задачи совпадает с функционалом из **Задачи 1**.

**Задача 2** состоит в максимизации функции полезности  $J(\cdot)$  вдоль траекторий системы (8), удовлетворяющих начальному условию и ограничениям на управление  $s(t) \in [0, \bar{s}]$ .

Решение задачи в рамках принципа максимума Понтрягина [4] приводит к следующей гамильтоновой системе (см. [4, Section 8])

$$\begin{cases} \dot{c}(t) = c(t) \left( \mathbf{s}(t)A(t) - \alpha_1\delta_1 + \alpha_2 \left( \frac{\dot{p}(t)}{p(t)} - \delta_2 \right) \right), & c(0) = c_0, \\ \dot{z}(t) = \rho z(t) - 1, & \lim_{t \rightarrow +\infty} z(t) = 0, \end{cases}$$

где переменная  $z(t) = c(t)\psi(t)e^{\rho t}$  играет роль сопряженной переменной. В силу условия трансверсальности, легко определить, что  $z(t) = 1/\rho$ . Это приводит к следующей структуре оптимального управления  $\mathbf{s}(t) = \min \{ \max \{ \bar{s}, 1 - \rho/A(t) \}, 0 \}$ . Интегрирование уравнения (8) для найденного управления  $\mathbf{s}(t)$  позволяет найти оптимальный уровень относительной стоимости  $c = c(t)$  факторов производства.

## 3. Численные результаты

Численные результаты применения двухуровневой оптимизационной схемы были получены при следующих значениях парамет-

ров модели:  $\alpha_1 = 0.721$ ,  $\alpha_2 = 0.279$ ,  $a = 0.0549$ ,  $\bar{s} = 0.5$ ,  $\rho = 0.03$ ,  $\delta_1 = 0.213$ ,  $\delta_2 = 0.013$ ,  $x_1^0 = x_2^0 = 1.0$ ,  $p_0 = 0.387$  и  $c_0 = 1.387$ .

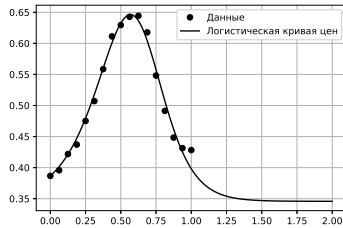


Рис. 1: Относит. цены,  $p(t)$

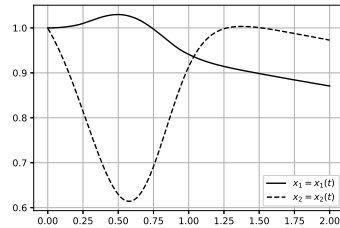


Рис. 2: Факторы пр-ва.,  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$

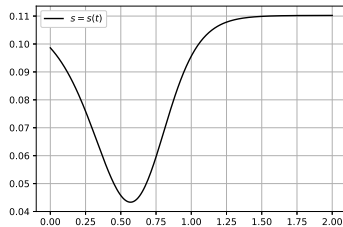


Рис. 3: Общие инвестиции,  $s(t)$

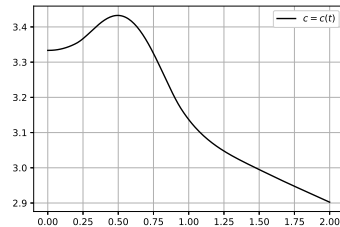


Рис. 4: Относит. стоимость,  $c(t)$

Относительная цена  $p(t)$  (см. Рис. 1) имеет максимум, после которого снижается до стационарного значения  $p^*$ . Данное поведение цены влияет на динамику общих затрат  $c(t)$  (см. Рис. 4) и, как следствие, на динамику факторов производства (см. Рис. 2). На Рис. 3 изображены общие инвестиции (управления)  $s(t)$ , которые демонстрируют “V-образный” тренд со стабилизацией на стационарном уровне  $s^* = 1 - \rho/A^*$ , где  $A^* = a\alpha((1 - \alpha)/(\alpha p^*))^{1-\alpha}$ .

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 25-11-00269, <https://rscf.ru/project/25-11-00269/>

## Литература

- [1] *Krasovskii A.A., Kryazhimskiy A.V., Tarasyev A.M.* Optimal control design in models of economic growth // *Evolutionary*

Methods for Design, Optimization and Control. Barcelona: CIMNE, 2008. P. 70–75.

- [2] *Krasovskii A.A., Tarasyev A.M.* Dynamic optimization of investments in the economic growth models // Autom. Remote Control. 2007. Vol. 68, No. 10. P. 1765–1777. DOI: 10.1134/S0005117907100050
- [3] *Tarasyev A.M., Usova A.A.* Construction of a regulator for the Hamiltonian system in a two-sector economic growth model // Proc. Steklov Inst. Math. 2010. Vol. 271. P. 265–285. DOI: 10.1134/S008154381004019X
- [4] *Kryazhimskii A.V., Tarasyev A.M.* Optimal control for proportional economic growth // Proc. Steklov Inst. Math. 2016. Vol. 293, Suppl. 1. P. S101–S119. DOI: 10.1134/S0081543816050102